

Corrigé du contrôle de maths spé : suites et séries de fonctions

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : convergence uniforme et continuité	3 points
Exercice 2 : Étude de la suite de fonctions $x^n(1 - x)$	5 points
Exercice 3 : Une série de fonctions exponentielles	6 points
Exercice 4 : Problème : la fonction zêta de Riemann	6 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : convergence uniforme et continuité (3 points)

- a. **Théorème de la double limite.** Soit a un point adhérent à I (éventuellement $\pm\infty$). On suppose que (f_n) converge uniformément sur I vers f et que, pour tout n , f_n admet une limite finie ℓ_n en a . Alors la suite (ℓ_n) converge vers un réel ℓ , et $f(x) \rightarrow \ell$ quand $x \rightarrow a$. Autrement dit :

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x).$$

- b. Soit $a \in I$ et $\varepsilon > 0$. Par convergence uniforme, il existe un rang N tel que

$|f_N - f|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Ensuite, comme f_N est continue en a , il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in I$ vérifiant $|x - a| \leq \delta$, on ait $|f_N(x) - f_N(a)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Pour un tel x , l'inégalité triangulaire donne alors :

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Donc f est continue en tout point a de I , c'est-à-dire continue sur I .

Erreur fréquente : choisir le rang N en fonction de x . Le rang doit être choisi avant x , grâce à la norme infinie : c'est exactement là que sert l'uniformité.

Barème : a) 1 point : 0,5 point pour les hypothèses (convergence uniforme, limites ℓ_n finies), 0,5 point pour la conclusion ; b) 2 points : 0,5 point pour le choix de N , 0,5 point pour la continuité de f_N , 1 point pour l'inégalité triangulaire et la conclusion.

Exercice 2 : Étude de la suite de fonctions $x^n(1 - x)$ (5 points)

a. Si $x \in [0, 1[$, alors $x^n \rightarrow 0$, donc $f_n(x) \rightarrow 0$. Si $x = 1$, alors $f_n(1) = 0$ pour tout n . **La suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.**

b. La fonction f_n est polynomiale, donc dérivable, et pour tout $x \in [0, 1]$:

$$f'_n(x) = n x^{n-1}(1-x) - x^n = x^{n-1}(n - (n+1)x).$$

Ainsi f'_n est positive sur $\left[0, \frac{n}{n+1}\right]$ et négative sur $\left[\frac{n}{n+1}, 1\right]$. Le tableau de variation est donc le suivant.

x	0	$\frac{n}{n+1}$	1
signe de $f'_n(x)$		+ puis 0 puis -	
variations de f_n	0	croissante jusqu'au maximum, puis décroissante	0

Comme $f_n \geq 0$ sur $[0,1]$, on obtient :

$$|f_n|_{\infty} = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}.$$

Donc $|f_n|_{\infty} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$

c. On a $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$. Or $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 1$, donc ce facteur tend vers e^{-1} par continuité de l'exponentielle. De plus $\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$. Par conséquent :

$$|f_n|_{\infty} \sim \frac{1}{e n} \longrightarrow 0.$$

La suite (f_n) converge donc uniformément vers 0 sur $[0,1]$, avec $|f_n|_{\infty} \sim \frac{1}{en}$.

d. Pour $x \in [0,1[$, on a $n x^n \rightarrow 0$ par croissances comparées, et $g_n(1) = 0$: (g_n) converge simplement vers 0. De plus $g_n = n f_n$, donc, d'après b) :

$$|g_n|_{\infty} = \frac{n}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \longrightarrow e^{-1} \neq 0.$$

La convergence de (g_n) n'est donc pas uniforme sur $[0,1]$.

Soit maintenant $a \in [0,1[$. Comme $\frac{n}{n+1} \rightarrow 1$, il existe un rang n_0 tel que $\frac{n}{n+1} \geq a$ pour $n \geq n_0$. Pour ces n , g_n est croissante sur $[0,a]$, donc $\sup_{[0,a]} |g_n| = n a^n (1-a)$, qui tend vers 0. **La convergence est donc uniforme sur $[0,a]$.**

- e. Pour $x \in [0,1[$, la série géométrique donne $S(x) = (1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = (1-x) \frac{x}{1-x} = x$.
 Pour $x = 1$, $S(1) = 0$. Ainsi S n'est pas continue en 1. Or chaque f_n est continue : si la série convergerait uniformément, sa somme serait continue d'après l'exercice 1. **La série $\sum f_n$ ne converge donc pas uniformément sur $[0,1]$.**

Barème : a) 0,5 point ; b) 1,5 point : 0,5 point pour la dérivée factorisée, 0,5 point pour le tableau, 0,5 point pour la valeur du maximum ; c) 1 point : 0,5 point pour la limite $e-1$, 0,5 point pour l'équivalent et la conclusion ; d) 1,5 point : 0,5 point pour la convergence simple, 0,5 point pour la non-uniformité, 0,5 point pour la convergence uniforme sur $[0,a]$; e) 0,5 point.

Exercice 3 : Une série de fonctions exponentielles (6 points)

- a. Pour tout $x \geq 0$, on a $0 < u_n(x) \leq \frac{1}{1+n^2}$, donc $|u_n|_\infty = \frac{1}{1+n^2}$. Or $\frac{1}{1+n^2} \sim \frac{1}{n^2}$, terme général d'une série de Riemann convergente. Ainsi $\sum u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0,+\infty[$. Chaque u_n étant continue, **S est définie et continue sur $[0,+\infty[$.**
- b. On a $u_0(x) = 1$ et, pour $n \geq 1$, $u_n(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$. La convergence étant uniforme sur $[0,+\infty[$, le théorème de la double limite donne $S(x) \rightarrow 1 + 0 = 1$. **Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = 1$.**

Ensuite, pour $x > 0$:

$$0 \leq S(x) - 1 - \frac{e^{-x}}{2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{e^{-2x}}{1 - e^{-x}}.$$

Or $\frac{e^{-2x}}{1-e^{-x}} = e^{-x} \cdot \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$ et le second facteur tend vers 0 : ce majorant est donc un $o(e^{-x})$. **Ainsi** $S(x) - 1 = \frac{e^{-x}}{2} + o(e^{-x})$, **soit** $S(x) - 1 \sim \frac{e^{-x}}{2}$.

- c. Chaque u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et $u'_n(x) = -\frac{n e^{-nx}}{1+n^2}$. La série $\sum u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ d'après a). Soit ensuite $a > 0$. Pour $x \geq a$:

$$|u'_n(x)| \leq \frac{n}{1+n^2} e^{-na} \leq e^{-na},$$

et $\sum e^{-na}$ est une série géométrique convergente car $e^{-a} < 1$. La série des dérivées converge donc normalement sur tout $[a, +\infty[$. Par le théorème de dérivation terme à terme, **S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et** $S'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n e^{-nx}}{1+n^2}$.

- d. On vérifie d'abord l'identité : $\frac{1}{n} - \frac{1}{n(1+n^2)} = \frac{1+n^2-1}{n(1+n^2)} = \frac{n}{1+n^2}$. Pour $x > 0$, les deux séries ci-dessous convergent, donc on peut séparer :

$$S'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n(1+n^2)}.$$

Comme $-\ln(1-q) = \sum_{n \geq 1} \frac{q^n}{n}$ pour $|q| < 1$, avec $q = e^{-x}$, on obtient

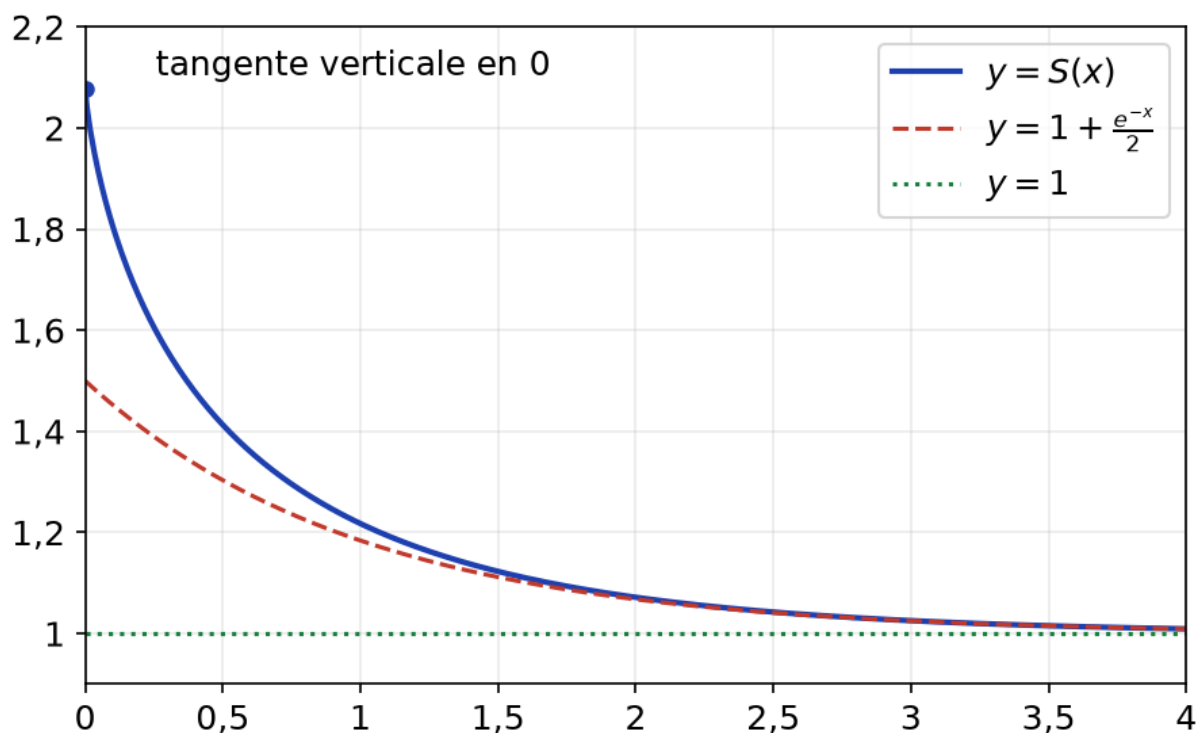
$$S'(x) = \ln(1 - e^{-x}) + B(x), \text{ où } 0 \leq B(x) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}. \text{ La fonction } B \text{ est donc}$$

bornée.

Ensuite, $\ln(1-e^{-x}) = \ln x + \ln\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right)$, et le second terme tend vers $\ln 1 = 0$. Puisque $\ln x \rightarrow -\infty$, on en déduit $\frac{S'(x)}{\ln x} \rightarrow 1$. **Donc** $S'(x) \sim \ln x$ **quand** $x \rightarrow 0^+$.

Enfin, pour $x \in]0, 1]$, S est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$. L'égalité des accroissements finis fournit $c_x \in]0, x[$ tel que $\frac{S(x)-S(0)}{x} = S'(c_x)$. Quand $x \rightarrow 0^+$,

$c_x \rightarrow 0^+$, donc ce taux tend vers $-\infty$. Ainsi S n'est pas dérivable en 0 : sa courbe y admet une tangente verticale.



Barème : a) 1 point : 0,5 point pour la majoration normale, 0,5 point pour la continuité ; b) 1,5 point : 0,5 point pour la double limite, 1 point pour l'équivalent ; c) 1,5 point : 0,5 point pour la dérivée des termes, 1 point pour la convergence normale sur $[a, +\infty[$ et la conclusion ; d) 2 points : 0,5 point pour la décomposition, 0,5 point pour le logarithme, 0,5 point pour l'équivalent, 0,5 point pour la non-dérivabilité.

Exercice 4 : Problème : la fonction zêta de Riemann (6 points)

- a. Pour $x > 1$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^x}$ converge, donc ζ est définie sur $]1, +\infty[$. Soit $a > 1$. Pour $x \geq a$ et $n \geq 1$, on a $0 < \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a}$, et $\sum \frac{1}{n^a}$ converge. La série converge donc normalement sur $[a, +\infty[$. Les termes étant continus, ζ est continue sur chaque $[a, +\infty[$. Comme $]1, +\infty[$ est la réunion de ces intervalles, ζ est continue sur $]1, +\infty[$.

- b. La série converge uniformément sur $[2, +\infty[$. De plus, $\frac{1}{1^x} = 1$ et $\frac{1}{n^x} \rightarrow 0$ pour $n \geq 2$ quand $x \rightarrow +\infty$. Par le théorème de la double limite, $\zeta(x) \rightarrow 1$ **quand** $x \rightarrow +\infty$.
- c. On écrit $\frac{1}{n^x} = e^{-x \ln n}$: chaque terme est de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivée $-\frac{\ln n}{n^x}$. Soit $a > 1$ et $b = \frac{1+a}{2} > 1$. Pour $x \geq a$, on a $\left| \frac{\ln n}{n^x} \right| \leq \frac{\ln n}{n^a}$. Or $n^b \cdot \frac{\ln n}{n^a} = \frac{\ln n}{n^{(a-1)/2}} \rightarrow 0$, donc $\frac{\ln n}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^b}\right)$: la série des dérivées converge normalement sur $[a, +\infty[$. Avec la convergence simple de a), le théorème de dérivation terme à terme donne que ζ est $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$, avec :

$$\zeta'(x) = -\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^x} < 0.$$

Donc ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

- d. La fonction $t \rightarrow t^{-x}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$. Pour tout $k \geq 1$, on a donc $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{k^x}$, et pour $k \geq 2$, $\frac{1}{k^x} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^x}$. En sommant, puis avec $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{x-1}$:

$$\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \text{ et } \zeta(x) - 1 \leq \frac{1}{x-1}.$$

En multipliant par $x-1 > 0$, il vient $1 \leq (x-1)\zeta(x) \leq x$. Par encadrement, $(x-1)\zeta(x) \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 1^+$. **Donc $\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1}$ en 1^+ .**

- e. Pour $x > 1$, les séries convergent absolument. On peut donc regrouper les termes pairs :

$$F(x) = \zeta(x) - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^x} = \zeta(x) - 2 \cdot 2^{-x} \zeta(x) = (1-2^{1-x})\zeta(x).$$

Pour $x \geq 1$, la suite $\left(\frac{1}{n^x}\right)$ décroît vers 0. Le critère des séries alternées assure donc la convergence et majore le reste : $|R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{n+1}$. Ce majorant ne dépend pas de x

et tend vers 0 : la convergence est uniforme sur $[1, +\infty[$. Par conséquent, F est continue sur $[1, +\infty[$, et $F(1) = \ln 2$.

Enfin $1 - 2^{1-x} = 1 - e^{-(x-1)\ln 2} \sim (x-1)\ln 2$ quand $x \rightarrow 1^+$. Ainsi :

$$(x-1)\zeta(x) = \frac{(x-1)F(x)}{1-2^{1-x}} \longrightarrow \frac{\ln 2}{\ln 2} = 1.$$

On retrouve $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)\zeta(x) = 1$.

Barème : a) 1 point : 0,5 point pour la domination, 0,5 point pour la continuité sur la réunion ; b) 0,5 point ; c) 1,5 point : 0,5 point pour la dérivée des termes, 0,5 point pour la domination, 0,5 point pour le signe ; d) 1,5 point : 1 point pour l'encadrement, 0,5 point pour l'équivalent ; e) 1,5 point : 0,5 point pour l'identité, 0,5 point pour la convergence uniforme, 0,5 point pour la limite.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : suites et séries de fonctions

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours [« Suites de fonctions » en maths spé](#) et [« Séries de fonctions » en maths spé](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [suites de fonctions](#), [séries de fonctions](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths spé classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).