

Corrigé du contrôle de maths spé : séries numériques et sommation des équivalents

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : sommation des relations de comparaison	4 points
Exercice 2 : Nature de séries par d'Alembert et équivalents	4 points
Exercice 3 : Comparaison série-intégrale	4 points
Exercice 4 : Série alternée et produit de Cauchy	3 points
Exercice 5 : Problème : développement asymptotique de la série harmonique	5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : sommation des relations de comparaison (4 points)

a. **Théorème.** Soient (v_n) une suite de réels positifs et (u_n) une suite réelle telle que $u_n \sim v_n$.

Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et les restes sont équivalents : $R_n(u) \sim R_n(v)$.

Si $\sum v_n$ diverge, alors $\sum u_n$ diverge et les sommes partielles sont équivalentes : $S_n(u) \sim S_n(v)$.

- b. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $u_n - v_n = o(v_n)$, il existe N tel que $|u_k - v_k| \leq \varepsilon v_k$ pour tout $k \geq N$. En particulier, $|u_k| \leq (1 + \varepsilon) v_k$ pour $k \geq N$. La série $\sum v_k$, à termes positifs, converge : par comparaison, $\sum u_k$ converge absolument, donc converge.

Pour $n \geq N$, l'inégalité triangulaire (passée à la limite dans les sommes partielles) donne :

$$|R_n(u) - R_n(v)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k - v_k| \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k = \varepsilon R_n(v).$$

Ceci vaut pour tout $\varepsilon > 0$: $R_n(u) - R_n(v) = o(R_n(v))$. **Donc** $R_n(u) \sim R_n(v)$.

- c. Soit $\varepsilon > 0$ et N comme en b). La série $\sum u_n$ diverge, car $u_k \geq (1 - \varepsilon) v_k$ pour $k \geq N$ (avec $\varepsilon < 1$), et $\sum v_k$ est une série positive divergente. Pour $n \geq N$:

$$|S_n(u) - S_n(v)| \leq \sum_{k=0}^{N-1} |u_k - v_k| + \varepsilon \sum_{k=N}^n v_k \leq C_N + \varepsilon S_n(v),$$

où $C_N = \sum_{k=0}^{N-1} |u_k - v_k|$ ne dépend pas de n . Comme $\sum v_n$ est positive et divergente, $S_n(v) \rightarrow +\infty$: il existe $N_1 \geq N$ tel que $C_N \leq \varepsilon S_n(v)$ pour $n \geq N_1$. Alors $|S_n(u) - S_n(v)| \leq 2\varepsilon S_n(v)$.

Ainsi $S_n(u) - S_n(v) = o(S_n(v))$, c'est-à-dire $S_n(u) \sim S_n(v)$.

Barème : a) 0,5 point par cas, hypothèse de signe comprise ; b) 0,5 point pour la convergence de $\sum u_n$, 1 point pour la majoration des restes ; c) 0,5 point pour la découpe au rang N , 0,5 point pour l'absorption de la constante, 0,5 point pour la conclusion.

Erreur fréquente : oublier l'hypothèse de signe constant sur (u_n) ; sans elle, le théorème est faux.

Exercice 2 : Nature de séries par d'Alembert et équivalents (4 points)

a. Le terme $u_n = \frac{n!}{n^n}$ est strictement positif, et :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right).$$

Comme $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 1$, ce rapport tend vers $\frac{1}{e} < 1$. **D'après la règle de d'Alembert, la série converge.**

b. Le terme $u_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2 5^n}$ est strictement positif, et :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2 \times 5} = \frac{2(2n+1)}{5(n+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \frac{4}{5} < 1.$$

D'après la règle de d'Alembert, la série converge.

c. Pour $n \geq 1$, $1 - \cos \frac{1}{n} \geq 0$, et comme $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, $1 - \cos \frac{1}{n} \sim \frac{1}{2n^2}$. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (exposant $2 > 1$). **Par comparaison de séries à termes positifs équivalents, la série converge.**

d. Le terme $u_n = \frac{a^n}{n}$ est strictement positif et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} a \rightarrow a$.

Si $a < 1$, **la série converge** (d'Alembert). Si $a > 1$, $\frac{a^n}{n} \rightarrow +\infty$ par croissances comparées : **la série diverge grossièrement**. Si $a = 1$, la règle ne conclut pas, mais on reconnaît la série harmonique : **elle diverge**.

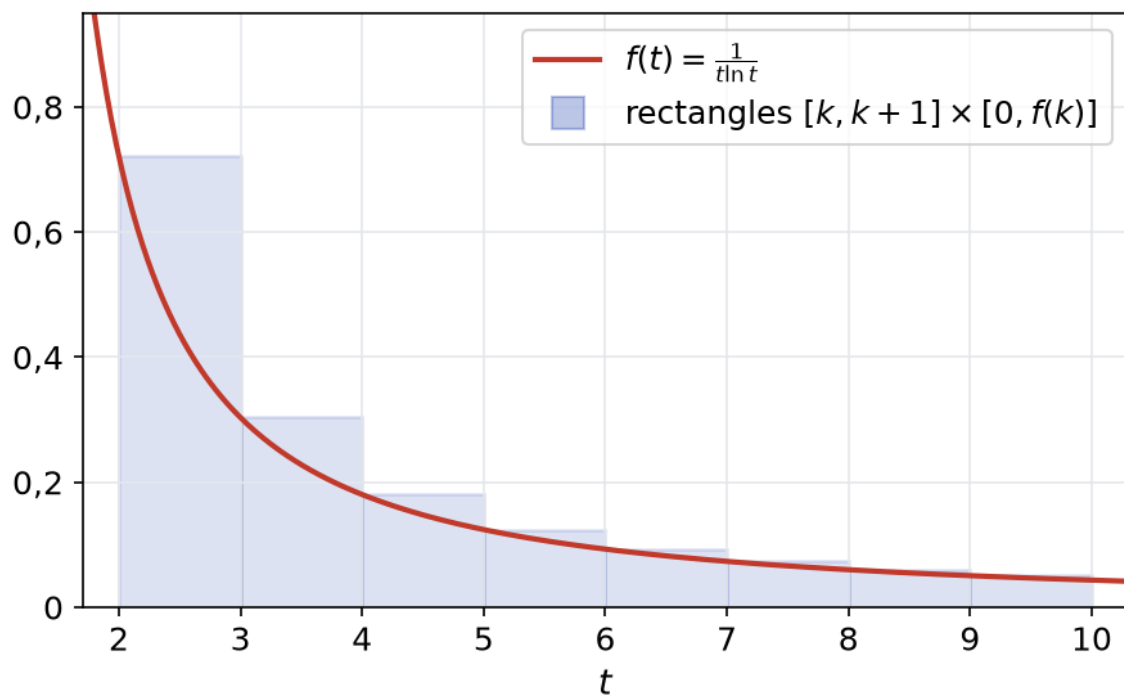
Barème : 1 point par série ; en d), 0,25 point pour le rapport, 0,25 point par cas.

Exercice 3 : Comparaison série-intégrale (4 points)

a. Sur $[2, +\infty[$, la fonction $t \rightarrow t \ln t$ est strictement positive et croissante, comme produit de fonctions positives croissantes. Donc f est décroissante et positive. Une primitive de f est $F : t \rightarrow \ln(\ln t)$, car $F'(t) = \frac{1}{t}$.

Par décroissance, pour $k \geq 2$, $\int_k^{k+1} f \leq f(k)$, et pour $k \geq 3$, $f(k) \leq \int_{k-1}^k f$. En sommant :

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) = \int_2^{n+1} f \leq S_n \leq f(2) + \int_2^n f = \frac{1}{2 \ln 2} + \ln(\ln n) - \ln(\ln 2).$$



Le minorant tend vers $+\infty$: **la série** $\sum \frac{1}{k \ln k}$ **diverge**. De plus,
 $\ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, donc :

$$\ln(\ln(n+1)) = \ln(\ln n) + \ln\left(1 + \frac{\ln(1 + 1/n)}{\ln n}\right) = \ln(\ln n) + o(1).$$

Les deux bornes s'écrivent donc $\ln(\ln n) + O(1)$. Comme $\ln(\ln n) \rightarrow +\infty$, on divise par $\ln(\ln n)$ et le théorème des gendarmes donne $\frac{S_n}{\ln(\ln n)} \rightarrow 1$. **Ainsi** $S_n \sim \ln(\ln n)$.

b. La fonction $t \rightarrow \frac{1}{t^2}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$. Pour $k \geq 2$,

$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2}$. On somme pour k allant de $n+1$ à $+\infty$, les intégrales généralisées convergent :

$$\frac{1}{n+1} = \int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{n}.$$

Comme $\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$, l'encadrement donne $R_n \rightarrow 1$. **Donc** $R_n \sim \frac{1}{n}$.

Barème : a) 0,5 point pour la décroissance et la primitive, 1 point pour l'encadrement, 0,25 point pour la divergence, 0,75 point pour l'équivalent ; b) 1 point pour l'encadrement, 0,5 point pour l'équivalent.

Exercice 4 : Série alternée et produit de Cauchy (3 points)

a. On a $a_n = (-1)^n b_n$ avec $b_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. La suite (b_n) est positive, décroissante, et tend vers 0. **D'après le critère spécial des séries alternées, $\sum a_n$ converge.**

b. On a $|a_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{n^{1/2}}$, terme d'une série de Riemann d'exposant $\frac{1}{2} \leq 1$, divergente. **La série n'est pas absolument convergente** : elle est semi-convergente.

c. On calcule $a_k a_{n-k} = \frac{(-1)^k (-1)^{n-k}}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$. Tous les termes de c_n ont donc le même signe $(-1)^n$. D'après l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\sqrt{(k+1)(n-k+1)} \leq \frac{(k+1) + (n-k+1)}{2} = \frac{n+2}{2}.$$

Chacun des $n + 1$ termes est donc au moins égal à $\frac{2}{n+2}$ en valeur absolue, d'où $|c_n| \geq \frac{2(n+1)}{n+2}$. Ce minorant tend vers 2, donc (c_n) ne tend pas vers 0.

La série $\sum c_n$ diverge grossièrement. Le théorème sur le produit de Cauchy exige que les deux séries soient **absolument convergentes**, hypothèse en défaut d'après b).

Barème : a) 1 point (trois hypothèses du critère citées) ; b) 0,5 point ; c) 0,5 point pour le signe commun, 0,5 point pour la minoration, 0,5 point pour la divergence et l'hypothèse manquante.

Exercice 5 : Problème : développement asymptotique de la série harmonique (5 points)

a. Pour $n \geq 2$, $w_n = H_n - H_{n-1} - \ln n + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

Le développement limité $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ en 0, avec $x = \frac{1}{n}$, donne $w_n = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc $w_n \sim -\frac{1}{2n^2}$.

La série $\sum -w_n$ est donc, à partir d'un certain rang, à termes positifs, et équivalente au terme d'une série de Riemann convergente. Elle converge. Or $u_n = u_1 + \sum_{k=2}^n w_k$: par le lien suite-série, **la suite (u_n) converge.**

b. Pour $N > n$, $u_N - u_n = \sum_{k=n+1}^N w_k$. En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient

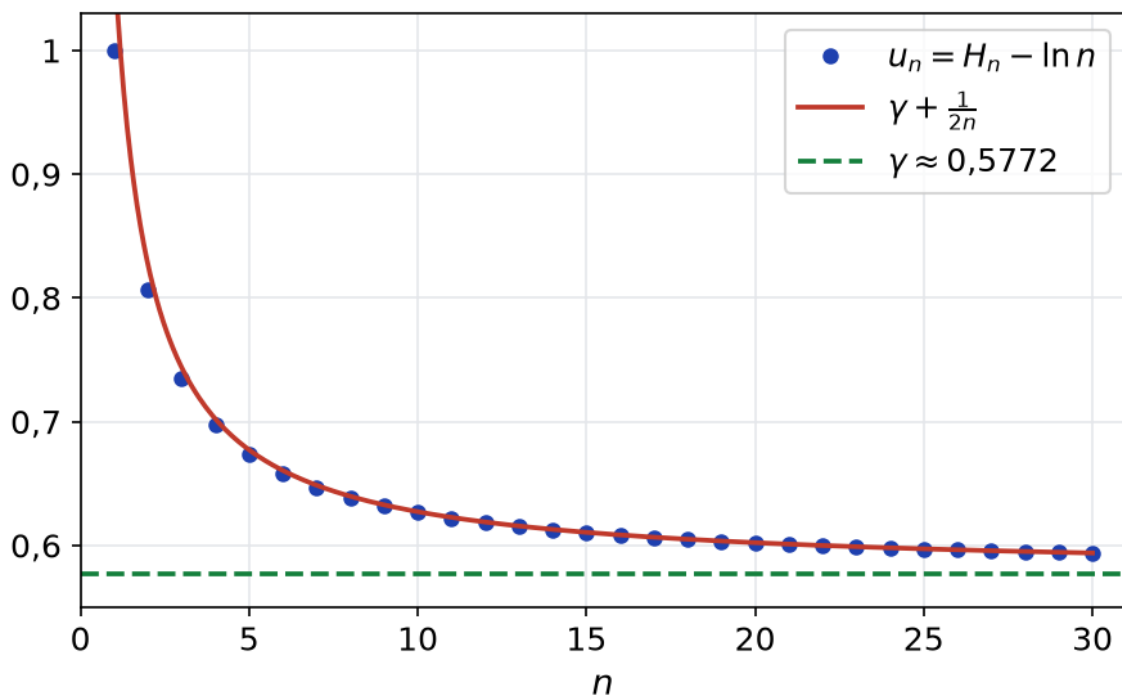
$$\gamma - u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k, \text{ donc :}$$

$$u_n - \gamma = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-w_k).$$

On applique le **théorème de sommation des équivalents dans le cas convergent** (exercice 1) avec $-w_k \sim \frac{1}{2k^2}$, la suite $\left(\frac{1}{2k^2}\right)$ étant positive et de série convergente. Les restes sont équivalents : $u_n - \gamma \sim \frac{1}{2} R_n$. D'après l'exercice 3 b), $R_n \sim \frac{1}{n}$. **Donc** $u_n - \gamma \sim \frac{1}{2n}$.

Autrement dit, $u_n - \gamma = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, soit :

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$



c. On a $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = H_{2n} - H_n$. Avec le développement de b), appliqué en $2n$ puis en n :

$$H_{2n} - H_n = \ln(2n) + \gamma + \frac{1}{4n} - \ln n - \gamma - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Comme $\ln(2n) - \ln n = \ln 2$ et $\frac{1}{4n} - \frac{1}{2n} = -\frac{1}{4n}$, on obtient

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \ln 2 - \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

d. D'après c), le terme général vérifie $t_n = H_{2n} - H_n - \ln 2 \sim -\frac{1}{4n}$. Il est donc négatif à partir d'un certain rang. La série $\sum -t_n$ est alors à termes positifs, équivalents à ceux de $\frac{1}{4} \sum \frac{1}{n}$, divergente. **La série $\sum t_n$ diverge.**

Barème : a) 0,25 point pour w_n , 0,5 point pour l'équivalent, 0,75 point pour la convergence de (u_n) ; b) 0,5 point pour l'écriture en reste, 1 point pour le théorème cité avec ses hypothèses, 0,5 point pour le développement de H_n ; c) 1 point ; d) 0,5 point.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : séries numériques et sommation des équivalents

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Séries numériques et vectorielles](#) » en [maths spé](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [séries numériques et vectorielles](#).

Retrouvez tous les [**contrôles de maths spé** classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).