

Corrigé du contrôle de maths spé : séries entières et développements usuels

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : lemme d'Abel et rayon de convergence	3 points
Exercice 2 : Deux rayons de convergence	4 points
Exercice 3 : Développements usuels et calcul de sommes	5 points
Exercice 4 : Une équation différentielle résolue par série entière	4 points
Exercice 5 : Problème : une récurrence et sa série génératrice	4 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : lemme d'Abel et rayon de convergence (3 points)

a. **Lemme d'Abel.** Soit $z_0 \neq 0$ tel que $(a_n z_0^n)$ soit bornée. Alors, pour tout z vérifiant $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Démonstration. Soit M tel que $|a_n z_0^n| \leq M$ pour tout n , et soit z tel que $|z| < |z_0|$.

On pose $q = \frac{|z|}{|z_0|} \in [0,1[$. Alors :

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \leq M q^n.$$

Or la série géométrique $\sum M q^n$ converge, car $0 \leq q < 1$. **Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum a_n z^n$ converge absolument.**

b. Le rayon de convergence est $R = \sup\{r \geq 0 : (a_n r^n) \text{ est borné}\} \in [0, +\infty]$. **La série converge absolument si $|z| < R$ et diverge grossièrement si $|z| > R$.**

c. Soit $\sum a_n x^n$ de rayon $R > 0$ et de somme S sur $] -R, R[$. La série dérivée $\sum n a_n x^{n-1}$ a le même rayon R . De plus, S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$ et $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$; en particulier $a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 point pour l'énoncé, 1 point pour la majoration géométrique et la conclusion ; b) 0,5 point ; c) 1 point : 0,5 point pour le rayon conservé, 0,5 point pour la régularité et la formule.

Exercice 2 : Deux rayons de convergence (4 points)

a. La série est lacunaire : on ne peut pas appliquer la règle de d'Alembert aux coefficients. On l'applique donc à la série numérique. Pour $z \neq 0$, on pose $u_n = n! |z|^{n^2} > 0$. Alors :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1) |z|^{(n+1)^2 - n^2} = (n+1) |z|^{2n+1}.$$

Si $|z| < 1$, ce rapport tend vers 0 par croissances comparées, donc la série converge absolument. Si $|z| \geq 1$, alors $u_n \geq n! \geq 1$, et le terme général ne tend pas vers 0 : la série diverge grossièrement. **Le rayon de convergence vaut donc $R = 1$.**

b.

i. Par la quantité conjuguée, $a_n = \frac{(n^2+1) - n^2}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n}$. Comme $\sqrt{n^2+1} \sim n$, on obtient $a_n \sim \frac{1}{2n}$. Deux séries entières dont les coefficients sont équivalents ont le même rayon. Or le rayon de $\sum \frac{x^n}{2n}$ vaut 1, car le rapport $\frac{n}{n+1}$ tend vers 1. **Donc le rayon de $\sum a_n x^n$ vaut 1.**

ii. Pour $x = 1$: $a_n > 0$ et $a_n \sim \frac{1}{2n}$, terme général d'une série divergente. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum a_n$ **diverge**.

Pour $x = -1$: le dénominateur $\sqrt{n^2+1} + n$ croît strictement vers $+\infty$. Ainsi (a_n) est décroissante et tend vers 0. Par le critère spécial des séries alternées, $\sum (-1)^n a_n$ **converge**.

Erreur fréquente : écrire $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ pour la série lacunaire, alors que la plupart des coefficients sont nuls.

Barème : a) 1,5 point : 1 point pour le rapport et le cas $|z| < 1$, 0,5 point pour la divergence grossière ; b) i) 1 point : 0,5 point pour l'équivalent, 0,5 point pour le rayon ; ii) 1,5 point : 0,5 point pour $x = 1$, 1 point pour $x = -1$ (décroissance justifiée et critère cité).

Exercice 3 : Développement usuels et calcul de sommes (5 points)

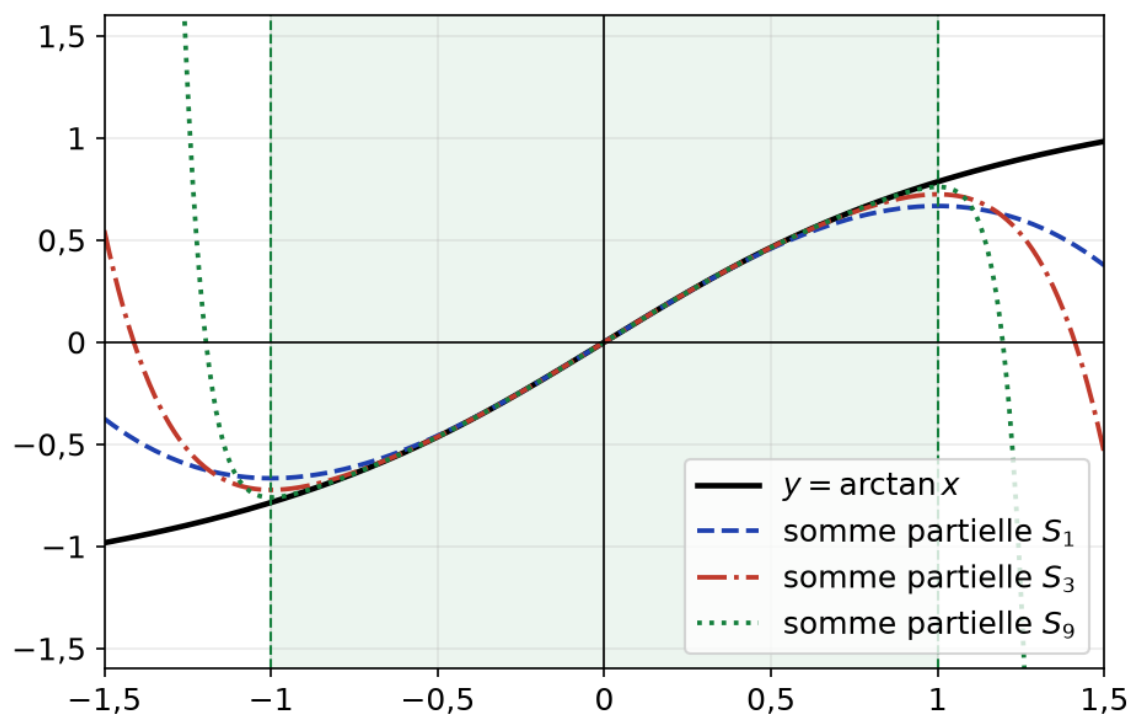
a. Pour $|t| < 1$, on a $\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n$, de rayon 1. On peut primitiver terme à terme sur $] -1, 1[$ sans changer le rayon. Comme $\ln(1+0) = 0$, il vient :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad x \in] -1, 1[.$$

De même, en remplaçant t par t^2 , on a $\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n}$ pour $|t| < 1$. Puis, en primitivant avec $\arctan 0 = 0$:

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad x \in]-1,1[.$$

Les deux développements ont pour rayon 1. La figure montre que les sommes partielles approchent l'arctangente sur $] -1,1[$ et s'en écartent au-delà.



b.

- i. Sur $] -R, R[$, on a $(1+x)y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)a_{n+1} + n a_n) x^n$. Par unicité des coefficients, l'équation équivaut à $(n+1)a_{n+1} + n a_n = \alpha a_n$ pour tout n , soit :

$$a_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1} a_n, \text{ donc } a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Comme $\alpha \notin \mathbb{N}$, aucun a_n n'est nul, et $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|\alpha - n|}{n+1} \rightarrow 1$. **Par la règle de d'Alembert, il existe une unique série solution, et son rayon vaut 1.**

ii. Sur $] -1, 1[$, on pose $h(x) = y(x)(1+x)^{-\alpha}$. Alors :

$$h'(x) = (1+x)^{-\alpha-1} \left((1+x)y'(x) - \alpha y(x) \right) = 0.$$

La fonction h est donc constante sur l'intervalle $] -1, 1[$, égale à $h(0) = a_0 = 1$. **Ainsi**

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \text{ pour } |x| < 1.$$

c. Pour $|x| < 1$, on dérive terme à terme $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ puis on multiplie par x :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

En recommençant, on calcule $\frac{d}{dx} \left(\frac{x}{(1-x)^2} \right) = \frac{(1-x) + 2x}{(1-x)^3} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$. Donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

Enfin, avec $x = \frac{1}{2} : \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}}{\frac{1}{8}} = \frac{3}{4} \times 8 = 6$. **Donc** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6$.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 point pour le logarithme, 0,5 point pour l'arctangente, 0,5 point pour la primitivation justifiée et le rayon ; b) i) 1 point : 0,5 point pour la récurrence, 0,5 point pour le rayon ; ii) 1 point ; c) 1,5 point : 0,5 point par somme, 0,5 point pour la valeur 6 .

Exercice 4 : Une équation différentielle résolue par série entière (4 points)

a. Sur $] -R, R[$, la somme y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et on peut dériver terme à terme. D'abord :

$$x y''(x) + 2 y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (n(n-1) + 2n) a_n x^{n-1} = \sum_{m=0}^{+\infty} (m+1)(m+2) a_{m+1} x^m.$$

Ensuite, $x y(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} a_{m-1} x^m$. Par unicité des coefficients d'une série entière de rayon non nul, y est solution sur $] -R, R[$ si et seulement si le coefficient constant $2a_1$ est nul et, pour $m \geq 1$, $(m+1)(m+2)a_{m+1} + a_{m-1} = 0$. **C'est bien la condition annoncée.**

b. Comme $a_1 = 0$, la relation $a_{n+1} = -\frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}$ donne par récurrence $a_{2k+1} = 0$. Pour les indices pairs, avec $n = 2k+1$, on obtient $a_{2k+2} = -\frac{a_{2k}}{(2k+2)(2k+3)}$. Par récurrence :

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} a_0.$$

En effet, la formule vaut pour $k = 0$, et si elle vaut au rang k , alors

$$a_{2k+2} = \frac{(-1)^{k+1} a_0}{(2k+1)!(2k+2)(2k+3)} = \frac{(-1)^{k+1} a_0}{(2k+3)!}.$$

Pour $x \neq 0$, la série $\sum \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$ converge absolument par la règle de d'Alembert, puisque le rapport $\frac{x^2}{(2k+2)(2k+3)}$ tend vers 0 : le rayon est $+\infty$. De plus, pour $x \neq 0$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sin x}{x}.$$

Ainsi $y(x) = a_0 \frac{\sin x}{x}$ pour $x \neq 0$, et $y(0) = a_0$, avec un rayon infini.

- c. Réciproquement, pour tout a_0 , la série obtenue vérifie les conditions de a) sur $\mathbb{R}$. **Les solutions développables en série entière sont donc les fonctions $x \rightarrow a_0 \frac{\sin x}{x}$, prolongées par a_0 en 0, avec $a_0 \in \mathbb{R}$.**

Barème : a) 2 points : 1 point pour les dérivations et le décalage d'indice, 0,5 point pour l'unicité des coefficients, 0,5 point pour $a_1 = 0$; b) 1,5 point : 0,5 point pour les coefficients, 0,5 point pour le rayon, 0,5 point pour la somme ; c) 0,5 point.

Exercice 5 : Problème : une récurrence et sa série génératrice (4 points)

- a. On montre par récurrence forte que $0 < t_k \leq k!$ pour tout k . C'est vrai pour $k = 0$ et $k = 1$. Supposons-le jusqu'au rang $n \geq 1$. Alors $t_{n+1} = t_n + n t_{n-1} > 0$, et :

$$t_{n+1} \leq n! + n (n-1)! = 2 n! \leq (n+1) n! = (n+1)!,$$

car $n+1 \geq 2$. Ainsi, pour $|x| < 1$, $\left| \frac{t_n}{n!} x^n \right| \leq |x|^n$, terme général d'une série convergente. **Le rayon de f est donc au moins 1.**

b. Sur $] -1, 1[$, la dérivation terme à terme donne $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t_{n+1}}{n!} x^n$. D'autre part :

$$(1+x) f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t_n}{n!} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t_{n-1}}{(n-1)!} x^n = t_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t_n + n t_{n-1}}{n!} x^n.$$

Or $t_1 = t_0 = 1$ et $t_n + n t_{n-1} = t_{n+1}$ pour $n \geq 1$. **Les deux séries coïncident, donc $f'(x) = (1+x) f(x)$ sur $] -1, 1[$.**

c. C'est une équation linéaire d'ordre un. La fonction $x \rightarrow f(x) e^{-x - x^2/2}$ a une dérivée nulle sur $] -1, 1[$, donc elle est constante, égale à $f(0) = t_0 = 1$. **Ainsi $f(x) = e^{x + x^2/2}$ pour $|x| < 1$.**

d. Les séries $e^x = \sum_{j \geq 0} \frac{x^j}{j!}$ et $e^{x^2/2} = \sum_{k \geq 0} \frac{x^{2k}}{2^k k!}$ ont un rayon infini. Leur produit de Cauchy a donc pour coefficient de x^n :

$$c_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{2^k k!} \cdot \frac{1}{(n-2k)!}.$$

Ce produit vaut $f(x)$ sur $] -1, 1[$. Par unicité des coefficients, $\frac{t_n}{n!} = c_n$. **On obtient bien la formule annoncée.**

Vérification : par la récurrence, $t_2 = 1 + 1 = 2$, $t_3 = 2 + 2 \times 1 = 4$,
 $t_4 = 4 + 3 \times 2 = 10$ et $t_5 = 10 + 4 \times 4 = 26$. Par la formule,
 $t_5 = 1 + \frac{120}{2 \times 1 \times 6} + \frac{120}{4 \times 2 \times 1} = 1 + 10 + 15 = 26$. **Les deux calculs donnent $t_5 = 26$.**

Enfin, la série de f coïncide avec le produit de Cauchy, dont le rayon est infini. **Le rayon de convergence de f est donc $+\infty$, et $f(x) = e^{x + x^2/2}$ sur $\mathbb{R}$.**

Barème : a) 1 point : 0,5 point pour la récurrence, 0,5 point pour le rayon ; b) 1 point ; c) 0,5 point ; d) 1,5 point : 0,5 point pour le produit de Cauchy, 0,5 point pour l'unicité et la formule, 0,5 point pour la vérification et le rayon infini.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : séries entières et développements usuels

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Séries entières](#) » en maths spé puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [séries entières](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths spé classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).