

Corrigé du contrôle de maths spé : polynôme minimal, noyaux et Cayley-Hamilton

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours	4 points
Exercice 2 : Polynôme minimal d'une matrice	5 points
Exercice 3 : Polynômes annulateurs	4 points
Exercice 4 : L'algèbre $K[u]$	3 points
Exercice 5 : Codiagonalisation	4 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours (4 points)

- a. Posons $P = P_1 P_2$. Comme P_1 et P_2 sont premiers entre eux, le théorème de Bézout dans $K[X]$ fournit U_1 et U_2 tels que $U_1 P_1 + U_2 P_2 = 1$. En évaluant en u (morphisme d'algèbres $Q \rightarrow Q(u)$), on obtient

$$U_1(u) \circ P_1(u) + U_2(u) \circ P_2(u) = \text{id}_E.$$

Rappelons aussi que deux polynômes en u commutent.

Inclusions. Si $x \in \ker P_1(u)$, alors $P(u)(x) = P_2(u)(P_1(u)(x)) = 0$. Donc $\ker P_1(u) \subset \ker P(u)$, et de même $\ker P_2(u) \subset \ker P(u)$.

La somme est directe. Soit $x \in \ker P_1(u) \cap \ker P_2(u)$. La relation ci-dessus donne $x = U_1(u)(P_1(u)(x)) + U_2(u)(P_2(u)(x)) = 0$.

La somme vaut $\ker P(u)$. Soit $x \in \ker P(u)$. Posons $x_1 = U_2(u) \circ P_2(u)(x)$ et $x_2 = U_1(u) \circ P_1(u)(x)$; alors $x = x_1 + x_2$. De plus, $P_1(u)(x_1) = U_2(u)(P(u)(x)) = 0$, donc $x_1 \in \ker P_1(u)$. De même, $x_2 \in \ker P_2(u)$.

Ainsi $\ker P(u) = \ker P_1(u) \oplus \ker P_2(u)$.

Généralisation. Si $P_1, \dots, P_r$ sont deux à deux premiers entre eux, alors P_1 est premier avec $P_2 \dots P_r$. Une récurrence sur r donne alors $\ker (P_1 \dots P_r)(u) = \ker P_1(u) \oplus \dots \oplus \ker P_r(u)$.

- b. **Théorème de Cayley-Hamilton.** Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on a $\chi_u(u) = 0$. Ainsi χ_u est un polynôme annulateur, donc μ_u divise χ_u . **En particulier**, $\deg \mu_u \leq n$.

Barème : a) 3 points : 0,5 pour la relation de Bézout évaluée en u , 0,5 pour les inclusions, 0,5 pour l'intersection nulle, 1 pour la décomposition $x = x_1 + x_2$, 0,5 pour la généralisation ; b) 1 point : 0,5 pour l'énoncé, 0,5 pour la conséquence.

Exercice 2 : Polynôme minimal d'une matrice (5 points)

- a. Le calcul ligne par colonne donne $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A + 2I_3$. Par conséquent,

$$(A + I_3)(A - 2I_3) = A^2 - A - 2I_3 = 0.$$

Le polynôme $(X + 1)(X - 2)$ **annule** A .

- b. Le polynôme minimal μ_A divise $(X + 1)(X - 2)$. S'il était de degré 1, A serait de la forme cI_3 , ce qui est faux. **Donc** $\mu_A = (X + 1)(X - 2) = X^2 - X - 2$.
- c. Le polynôme μ_A est scindé à racines simples, donc A **est diagonalisable**. Les valeurs propres sont exactement les racines de μ_A : $\text{Sp}(A) = \{-1, 2\}$. Notons α et β leurs multiplicités : $\alpha + \beta = 3$ et $\text{tr } A = -\alpha + 2\beta = 0$. On obtient $\beta = 1$ et $\alpha = 2$.

Donc $\chi_A = (X + 1)^2(X - 2)$.

d. La valeur 0 n'est pas valeur propre, donc A est inversible. De $A^2 - A = 2I_3$, on tire $A \times \frac{1}{2}(A - I_3) = I_3$. **Ainsi** $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3)$.

e. Le reste est de degré au plus 1 : $X^n = (X + 1)(X - 2)Q_n + a_nX + b_n$. En évaluant en 2 puis en -1 , on obtient $2a_n + b_n = 2^n$ et $-a_n + b_n = (-1)^n$. Par soustraction, $3a_n = 2^n - (-1)^n$. Il vient

$$a_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}, \quad b_n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}.$$

En évaluant en A , et comme $\mu_A(A) = 0$, on trouve $A^n = a_nA + b_nI_3$.

Les coefficients diagonaux de A^n valent $\frac{2^n + 2(-1)^n}{3}$, les autres valent $\frac{2^n - (-1)^n}{3}$.

Vérification : pour $n = 2$, on trouve $a_2 = 1$ et $b_2 = 2$, soit $A^2 = A + 2I_3$.

Barème : a) 1 point ; b) 1 point : 0,5 pour la divisibilité, 0,5 pour l'exclusion du degré 1 ; c) 1 point : 0,5 pour la diagonalisabilité et le spectre, 0,5 pour les multiplicités ; d) 0,5 point ; e) 1,5 point : 0,5 pour la forme du reste, 0,5 pour le système, 0,5 pour les coefficients de A^n .

Exercice 3 : Polynômes annulateurs (4 points)

a. Le polynôme $X^3 - X = X(X - 1)(X + 1)$ annule A et il est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. **Donc A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.** De plus, toute valeur propre est racine d'un polynôme annulateur : $\text{Sp}(A) \subset \{-1, 0, 1\}$.

b. Écrivons $A = P\Delta P^{-1}$ avec $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $\lambda_i \in \{-1, 0, 1\}$. Alors $A^2 = P\Delta^2 P^{-1}$, et $\lambda_i^2 = 1$ si $\lambda_i \neq 0$, $\lambda_i^2 = 0$ sinon. Ainsi $\text{tr}(A^2)$ est le nombre de λ_i non nuls. C'est exactement le rang de Δ , égal à celui de A puisque les deux matrices sont semblables. **Donc** $\text{rg}(A) = \text{tr}(A^2)$.

c. Le projecteur vérifie $p^2 = p$: le polynôme $X(X - 1)$, scindé à racines simples, l'annule. Le lemme des noyaux donne $E = \ker p \oplus \ker(p - \text{id})$, donc p est diagonalisable, de

matrice $\text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ dans une base adaptée. Sa trace est le nombre de 1, qui est aussi son rang : $\text{rg}(p) = \text{tr}(p)$.

La symétrie vérifie $s^2 = \text{id}$, et $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ avec $X - 1$ et $X + 1$ premiers entre eux. Comme $\ker(s^2 - \text{id}) = E$, le lemme des noyaux donne $E = \ker(s - \text{id}) \oplus \ker(s + \text{id})$: s est diagonalisable.

- d. D'abord, $\det(B)^2 = \det(B^2) = \det(-I_n) = (-1)^n$. Un carré de réel est positif, donc $(-1)^n = 1$: n est pair.

Ensuite, si λ est une valeur propre réelle de vecteur propre x , alors $-x = B^2x = \lambda^2x$, donc $\lambda^2 = -1$, ce qui est impossible. Ainsi B n'a aucune valeur propre réelle : **elle n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$** . En revanche, $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ et annule B . **Donc B est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.**

Barème : a) 1 point ; b) 1 point : 0,5 pour la forme diagonale de A^2 , 0,5 pour la conclusion ; c) 1 point : 0,5 pour le projecteur, 0,5 pour la symétrie ; d) 1 point : 0,5 pour la parité, 0,5 pour la diagonalisabilité sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

Erreur fréquente : affirmer que $\text{Sp}(A) = \{-1, 0, 1\}$. Un polynôme annulateur ne donne qu'une inclusion ; par exemple, $A = I_n$ vérifie $A^3 = A$.

Exercice 4 : L'algèbre $\mathbb{K}[u]$ (3 points)

- a. *Liberté*. Si $\sum_{k=0}^{d-1} a_k u^k = 0$ avec des a_k non tous nuls, le polynôme $\sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k$ est un polynôme annulateur non nul, de degré strictement inférieur à d . Cela contredit la définition de μ_u . La famille est donc libre.

Caractère générateur. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. La division euclidienne donne $P = Q\mu_u + R$ avec $\deg R < d$. Comme $\mu_u(u) = 0$, on obtient $P(u) = R(u)$, qui est combinaison linéaire de $\text{id}, u, \dots, u^{d-1}$.

La famille $(\text{id}, u, \dots, u^{d-1})$ est une base de $\mathbb{K}[u]$, et $\dim \mathbb{K}[u] = d = \deg \mu_u$.

- b. Supposons $\mu_u(0) = 0$: alors $\mu_u = XQ$ avec $\deg Q = d - 1$. Par minimalité, $Q(u) \neq 0$; il existe donc x tel que $y = Q(u)(x) \neq 0$. Or $u(y) = \mu_u(u)(x) = 0$, donc u n'est pas injectif, donc pas inversible.

Réciproquement, supposons $c = \mu_u(0) \neq 0$, et écrivons $\mu_u = XQ + c$. Alors $u \circ Q(u) = Q(u) \circ u = -c \text{ id}$. Donc u est inversible, d'inverse $-\frac{1}{c}Q(u)$. **Ainsi u est inversible si et seulement si $\mu_u(0) \neq 0$, et alors $u^{-1} = -\frac{1}{c}Q(u) \in \mathbb{K}[u]$.**

Pour la matrice de l'exercice 2, $\mu_A = X^2 - X - 2 = X(X - 1) - 2$. Ici $c = -2$ et $Q = X - 1$, d'où $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3)$, comme trouvé en 2 d).

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour la liberté, 0,5 pour la division euclidienne, 0,5 pour la dimension ; b) 1,5 point : 0,5 pour chaque sens, 0,5 pour l'application.

Exercice 5 : Codiagonalisation (4 points)

- a. Soit $x \in E_\lambda(u)$. Alors $u(v(x)) = v(u(x)) = \lambda v(x)$, donc $v(x) \in E_\lambda(u)$. **Chaque $E_\lambda(u)$ est stable par v .**
- b. Comme v est diagonalisable, μ_v est scindé à racines simples. Pour $x \in E_\lambda(u)$, on a $\mu_v(v_\lambda)(x) = \mu_v(v)(x) = 0$. Ainsi μ_v annule v_λ , et le polynôme minimal de v_λ divise μ_v . Il est donc lui aussi scindé à racines simples. **Par conséquent, v_λ est diagonalisable.**
- c. Comme u est diagonalisable, $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$. Dans chaque $E_\lambda(u)$, choisissons une base de vecteurs propres de v_λ , ce que permet b). Ces vecteurs sont propres pour v , et aussi pour u puisqu'ils sont dans $E_\lambda(u)$. La concaténation de ces bases est une base de E , car la somme est directe. **Il existe donc une base de vecteurs propres communs à u et v .**
- d. Le calcul donne $MN = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = NM$. Avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, on vérifie que $M(1,1) = (3,3)$, $M(1,-1) = (-1,1)$, $N(1,1) = (3,3)$ et $N(1,-1) = (1,-1)$. La matrice P est inversible ($\det P = -2$). **Ainsi $P^{-1}MP = \text{diag}(3, -1)$ et $P^{-1}NP = \text{diag}(3, 1)$.**
- e. Si u et v ont des matrices diagonales D_1 et D_2 dans une même base, alors $D_1 D_2 = D_2 D_1$, car deux matrices diagonales commutent. **Donc $u \circ v = v \circ u$.**

Barème : a) 0,5 point ; b) 1 point : 0,5 pour l'annulation de v_λ par μ_v , 0,5 pour la conclusion ; c) 1 point ; d) 1 point : 0,5 pour la commutation, 0,5 pour $\mathcal{P}$ et les matrices diagonales ; e) 0,5 point.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : polynôme minimal, noyaux et Cayley-Hamilton

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Polynômes d'endomorphismes](#) » en [maths spé](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [polynômes d'endomorphismes](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths spé classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths spé sur ce thème

- [Contrôle de maths spé : DS de réduction des endomorphismes](#)