Corrigé du contrôle de maths spé : ouverts, fermés, adhérence et continuité

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : fermés et continuité	3 points
Exercice 2 : Parties remarquables de M_n(R)	5 points
Exercice 3 : Intérieur et adhérence d'une partie du plan	4 points
Exercice 4 : Applications linéaires continues et normes subordonnées	3 points
Exercice 5 : Problème : prolongement d'égalités par densité	5 points
Total	**20 points**

Exercice 1 : Question de cours : fermés et continuité (3 points)

a. **Énoncé.** Une partie A de E est fermée si et seulement si, pour toute suite (a_k) d'éléments de A qui converge vers un vecteur $\ell \in E$, on a $\ell \in A$.

Supposons A fermée, et soit (a_k) une suite de A de limite ℓ. Supposons par l'absurde $\ell \notin A$. Comme $E \setminus A$ est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(\ell, r) \subset E \setminus A$. Or $|a_k - \ell| < r$ pour k assez grand, donc $a_k \notin A$: c'est absurde. Ainsi $\ell \in A$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Réciproquement, supposons la propriété vérifiée et montrons que $E \setminus A$ est ouvert. Soit $x \notin A$. Supposons qu'aucune boule $B\left(x, \frac{1}{k}\right)$ ne soit incluse dans $E \setminus A$: on choisit alors $a_k \in A$ avec $|a_k - x| < \frac{1}{k}$. La suite (a_k) de A converge vers x, donc $x \in A$: contradiction. **Une boule centrée en x est donc incluse dans $E \setminus A$, qui est ouvert : A est fermée.**

b. Soit $x \in f^{-1}(U)$. Comme $f(x) \in U$ et U est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(f(x), \varepsilon) \subset U$. Par continuité de f en x, il existe $\eta > 0$ tel que $|y - x| < \eta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Pour $y \in B(x, \eta)$, on a donc $f(y) \in U$, soit $y \in f^{-1}(U)$. **Ainsi $B(x, \eta) \subset f^{-1}(U)$, et $f^{-1}(U)$ est ouvert.**

Si G est un fermé de F, alors $f^{-1}(G) = E \setminus f^{-1}(F \setminus G)$ est le complémentaire d'un ouvert. **L'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé.**

Barème : a) 0,5 point pour l'énoncé, 0,75 point par implication ; b) 0,75 point pour les ouverts, 0,25 point pour les fermés.

Exercice 2 : Parties remarquables de M_n(R) (5 points)

a. Chaque application coordonnée $M \to m_{ij}$ est linéaire et vérifie $|m_{ij}| \leq |M|$: elle est 1-lipschitzienne, donc continue. D'après la formule :

$$\det M = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} m_{\sigma(j)\, j},$$

le déterminant est une somme de produits d'applications coordonnées. Les sommes et produits de

fonctions continues à valeurs réelles sont continus : $\det$ **est continue**. Enfin, $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$, où $\mathbb{R}^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. **Par image réciproque d'un ouvert,** $GL_n(\mathbb{R})$ **est ouvert.**

b. La matrice $A - \frac{1}{p} I_n$ est non inversible si et seulement si $\frac{1}{p}$ est valeur propre de A. Or A possède au plus n valeurs propres réelles, racines de χ_A. Il existe donc p_0 tel que, pour $p \geq p_0$, $\frac{1}{p}$ n'est pas valeur propre (on prend p_0 plus grand que les inverses des valeurs propres strictement positives). Pour $p \geq p_0$, $A_p = A - \frac{1}{p} I_n$ **est inversible**.

De plus, $|A_p - A| = \frac{1}{p} \to 0$. Toute matrice est donc limite d'une suite de matrices inversibles. **Par caractérisation séquentielle de l'adhérence,** $GL_n(\mathbb{R})$ **est dense dans** $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$**.**

c. Pour I, J parties de $\{1,. . ., n\}$ à $r+1$ éléments (possible car $r+1 \leq n$), on note $\delta_{I,J}(M)$ le déterminant de la matrice extraite de M sur les lignes I et les colonnes J. Comme en a), $\delta_{I,J}$ est une somme de produits de coordonnées, donc continue.

D'après le résultat admis, $\operatorname{rg} M \leq r$ si et seulement si aucune matrice carrée extraite de taille $r+1$ n'est inversible, c'est-à-dire si et seulement si tous les $\delta_{I,J}(M)$ sont nuls. Donc :

$$\mathcal{R}_r = \bigcap_{I,J} \delta_{I,J}^{-1}(\{0\}).$$

Chaque $\delta_{I,J}^{-1}(\{0\})$ est fermé, comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par une application continue. **Une intersection de fermés est fermée :** $\mathcal{R}_r$ **est fermé.**

Barème : a) 1 point pour la continuité du déterminant, 0,5 point pour l'ouvert ; b) 1 point pour l'inversibilité (spectre fini), 0,5 point pour la densité ; c) 0,5 point pour la continuité des mineurs, 1 point pour la traduction du rang, 0,5 point pour la conclusion.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Erreur fréquente : écrire que $\mathcal{R}_r$ est fermé « car c'est le complémentaire de $GL_n(\mathbb{R})$ » : ce n'est vrai que pour $r = n-1$.

Exercice 3 : Intérieur et adhérence d'une partie du plan (4 points)

a. Les applications $f : (x, y) \to x^2 + y^2$ et $g : (x, y) \to y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ (polynomiales en les coordonnées). On a :

$$D = f^{-1}(]-\infty, 1[) \cap g^{-1}(]0, +\infty[).$$

Chaque ensemble est l'image réciproque d'un ouvert de $\mathbb{R}$ par une application continue. **L'intersection de deux ouverts étant ouverte, D est ouvert.**

b. D'abord, D est un ouvert inclus dans A , donc $D \subset [\mathring{?}]A$. Ensuite, soit $s = (x, 0) \in S$ et $r > 0$. Le point $\left(x, -\frac{r}{2}\right)$ appartient à $B(s, r)$ mais pas à A , car son ordonnée est strictement négative. Aucune boule centrée en s n'est donc incluse dans A , et $s \notin [\mathring{?}]A$.

Ainsi $[\mathring{?}]A = D$.

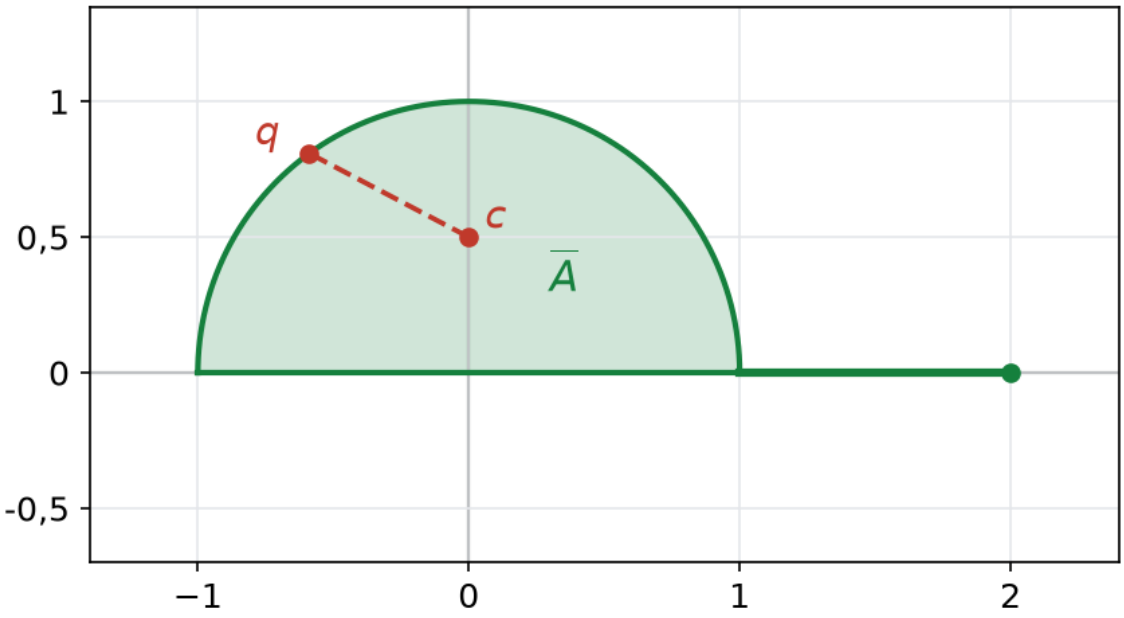
c. Posons $H = \begin{Bmatrix}(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, \\ , y \geq 0,0\end{Bmatrix}$ et $F = H \cup ([1, 2] \times \{0\})$. L'ensemble H est fermé, comme intersection des images réciproques $f^{-1}(]-\infty, 1])$ et $g^{-1}([0, +\infty[)$. Le segment $[1, 2] \times \{0\}$ est fermé : c'est l'intersection de l'image réciproque de $[1, 2]$ par $(x, y) \to x$ et de $g^{-1}(\{0\})$. Donc F est fermé. De plus, $A \subset F$, car $[0, 1] \times \{0\} \subset H$. L'adhérence étant le plus petit fermé contenant A , on obtient $\overline{A} \subset F$.

Réciproquement, les points de $[1,2]\times\{0\}$ sont dans A. Soit $q\in H$; pour $k\geq 1$, on pose $p_k=\left(1-\frac{1}{k}\right)q+\frac{1}{k}c$, avec $c=\left(0,\frac{1}{2}\right)$. Son ordonnée vaut $\left(1-\frac{1}{k}\right)y_q+\frac{1}{2k}>0$, et l'inégalité triangulaire donne :

$$|p_k|\leq\left(1-\frac{1}{k}\right)|q|+\frac{1}{k}|c|\leq 1-\frac{1}{k}+\frac{1}{2k}=1-\frac{1}{2k}<1.$$

Donc $p_k\in D\subset A$, et $p_k\to q$: ainsi $q\in\overline{A}$.

Conclusion : $\overline{A}=\left\{\begin{matrix}(x,y):x^2+y^2\leq 1,\\ ,y\geq 0,0\end{matrix}\right\}\cup([1,2]\times\{0\})$.



Barème : a) 1 point ; b) 0,5 point pour l'inclusion de D, 1 point pour les points de S ; c) 0,75 point pour l'inclusion dans F fermé, 0,75 point pour l'inclusion réciproque par les suites.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Exercice 4 : Applications linéaires continues et normes subordonnées (3 points)

a. Notons $S = \max_i \sum_j |a_{ij}|$. Pour tout x et tout i :

$$|(Ax)_i| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\, |x|_\infty \leq S\, |x|_\infty .$$

Donc $|u(x)|_\infty \leq S\, |x|_\infty$. D'après le critère de continuité des applications linéaires, u **est continue et** $|||\, u\, ||| \leq S$.

Soit i_0 un indice réalisant le maximum, et $x_j = 1$ si $a_{i_0 j} \geq 0$, $x_j = -1$ sinon. Alors $|x|_\infty = 1$ et $(Ax)_{i_0} = \sum_j |a_{i_0 j}| = S$, donc $|u(x)|_\infty \geq S$. **Ainsi** $|||\, u\, ||| = S$ **.**

b. Les sommes des lignes valent $1 + 2 = 3$ et $3 + 1 = 4$, donc $|||\, u\, ||| = 4$. La deuxième ligne n'a que des coefficients positifs : on prend $x = (1, 1)$, et $Ax = (-1, 4)$ vérifie bien $|Ax|_\infty = 4$.

c. La forme φ est linéaire, et $|\varphi(f)| \leq |f(1)| + |f(0)| \leq 2\, |f|_\infty$: elle est continue, avec $|||\, \varphi\, ||| \leq 2$. Pour $f_0 : t \to 2t - 1$, on a $|f_0|_\infty = 1$ et $\varphi(f_0) = 1 - (-1) = 2$. **Donc** $|||\, \varphi\, ||| = 2$ **.**

Barème : a) 0,75 point pour la majoration et la continuité, 0,75 point pour le vecteur qui réalise l'égalité ; b) 0,5 point ; c) 0,5 point pour la continuité, 0,5 point pour la valeur exacte.

Exercice 5 : Problème : prolongement d'égalités par densité (5 points)

a. Soit $x \in E$. Comme Δ est dense, x est adhérent à Δ : par caractérisation séquentielle, il existe une suite (d_k) de Δ qui converge vers x. Par continuité de f et g en x, $f(d_k) \to f(x)$ et $g(d_k) \to g(x)$. Or $f(d_k) = g(d_k)$ pour tout k. **Par unicité de la limite, $f(x) = g(x)$, donc $f = g$.**

b. Si A est inversible, $AB = A\,(BA)\,A^{-1}$: les matrices AB et BA sont semblables. Pour tout x, $x\,I_n - AB = A\,(x\,I_n - BA)\,A^{-1}$, donc $\det(x\,I_n - AB) = \det(x\,I_n - BA)$. **Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.**

c. Le coefficient d'indice (i, j) de AB vaut $\sum_k a_{ik}\,b_{kj}$: c'est une fonction linéaire des coefficients de A. Les coefficients de $x\,I_n - AB$ sont donc des fonctions affines, donc continues, de A. En les reportant dans la formule du déterminant, on voit que $A \to \det(x\,I_n - AB)$ est une somme de produits de fonctions continues. **Elle est continue, et de même pour $A \to \det(x\,I_n - BA)$.**

d. Fixons B et x. Les deux applications de c) sont continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et coïncident sur $GL_n(\mathbb{R})$ d'après b). Or $GL_n(\mathbb{R})$ est dense (exercice 2). D'après a), elles sont égales : $\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$ pour tout réel x et toute matrice A.

Le polynôme $\chi_{AB} - \chi_{BA}$ a alors une infinité de racines. **Il est nul : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ pour toutes matrices A et B.**

e. L'application $h : M \to M^2 - M$ est continue, car chaque coefficient de $h(M)$ est polynomial en les coefficients de M. Comme $\mathcal{P} = h^{-1}(\{0\})$, $\mathcal{P}$ **est fermé**.

La matrice nulle appartient à $\mathcal{P}$. En revanche, pour $k \geq 2$, $\left(\frac{1}{k}\,I_n\right)^2 = \frac{1}{k^2}\,I_n \neq \frac{1}{k}\,I_n$: la

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

suite $\left(\frac{1}{k} I_n\right)$ converge vers 0 sans être dans $\mathcal{P}$. Aucune boule centrée en 0 n'est donc incluse dans $\mathcal{P}$. $\mathcal{P}$ **n'est pas ouvert.**

Barème : 1 point par question ; en d), 0,5 point pour l'égalité des fonctions polynomiales et 0,5 point pour l'égalité des polynômes ; en e), 0,5 point pour chaque réponse.

Revenir à l'énoncé du contrôle

Après le corrigé du contrôle : ouverts, fermés, adhérence et continuité

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « Topologie et continuité » en maths spé puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** topologie et continuité.

Retrouvez tous les **contrôles de maths spé** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.