

Corrigé du contrôle de maths spé : normes, boules et normes équivalentes

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : normes usuelles sur K^n	3 points
Exercice 2 : Normes sur des espaces de fonctions et de polynômes	4 points
Exercice 3 : Boules unités dans le plan	3 points
Exercice 4 : Fonctions chapeaux et normes non équivalentes	4 points
Exercice 5 : Problème : suites de matrices et valeurs d'adhérence	6 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : normes usuelles sur K^n (3 points)

a. Une norme sur E est une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui vérifie, pour tous $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

la **séparation** $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$; l'**homogénéité** $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$; l'**inégalité triangulaire** $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

b. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et i un indice tel que $|x_i| = \|x\|_\infty$.

D'abord, $\|x\|_\infty^2 = |x_i|^2 \leq \sum_k |x_k|^2 = \|x\|_2^2$, donc $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$.

Ensuite, $\|x\|_1^2 = \sum_k |x_k|^2 + \sum_{k \neq i} |x_k| |x_i| \geq \|x\|_2^2$, d'où $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$.

Par l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** dans $\mathbb{R}^n$ appliquée aux vecteurs $(1, \dots, 1)$ et $(|x_1|, \dots, |x_n|)$:

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n 1 \times |x_k| \leq \sqrt{n} \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{n} \|x\|_2.$$

Enfin, $\|x\|_2^2 = \sum_k |x_k|^2 \leq n \|x\|_\infty^2$, donc $\sqrt{n} \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \times \sqrt{n} \|x\|_\infty = n \|x\|_\infty$.

La chaîne d'inégalités est démontrée.

Barème : a) 1 point (0,5 point si un axiome manque) ; b) 0,5 point par inégalité, Cauchy-Schwarz devant être cité.

Exercice 2 : Normes sur des espaces de fonctions et de polynômes (4 points)

- a. Pour $f \in E$, la fonction f' est continue sur le segment $[0, 1]$, donc bornée : $N(f)$ est un réel positif. L'homogénéité vient de $|\lambda f(0)| = |\lambda| |f(0)|$ et de $|\lambda f'|_{\infty} = |\lambda| |f'|_{\infty}$. L'inégalité triangulaire découle de $|f(0) + g(0)| \leq |f(0)| + |g(0)|$ et de l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_{\infty}$.

Séparation : si $N(f) = 0$, alors $f(0) = 0$ et $f' = 0$ sur $[0, 1]$. La fonction f est donc constante sur l'intervalle $[0, 1]$, égale à $f(0) = 0$. **Ainsi N est une norme sur E .**

- b. Soit $x \in [0, 1]$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$. Alors :

$$|f(x)| \leq |f(0)| + \int_0^x |f'(t)| dt \leq |f(0)| + x |f'|_{\infty} \leq N(f).$$

En passant à la borne supérieure sur x , $|f|_{\infty} \leq N(f)$.

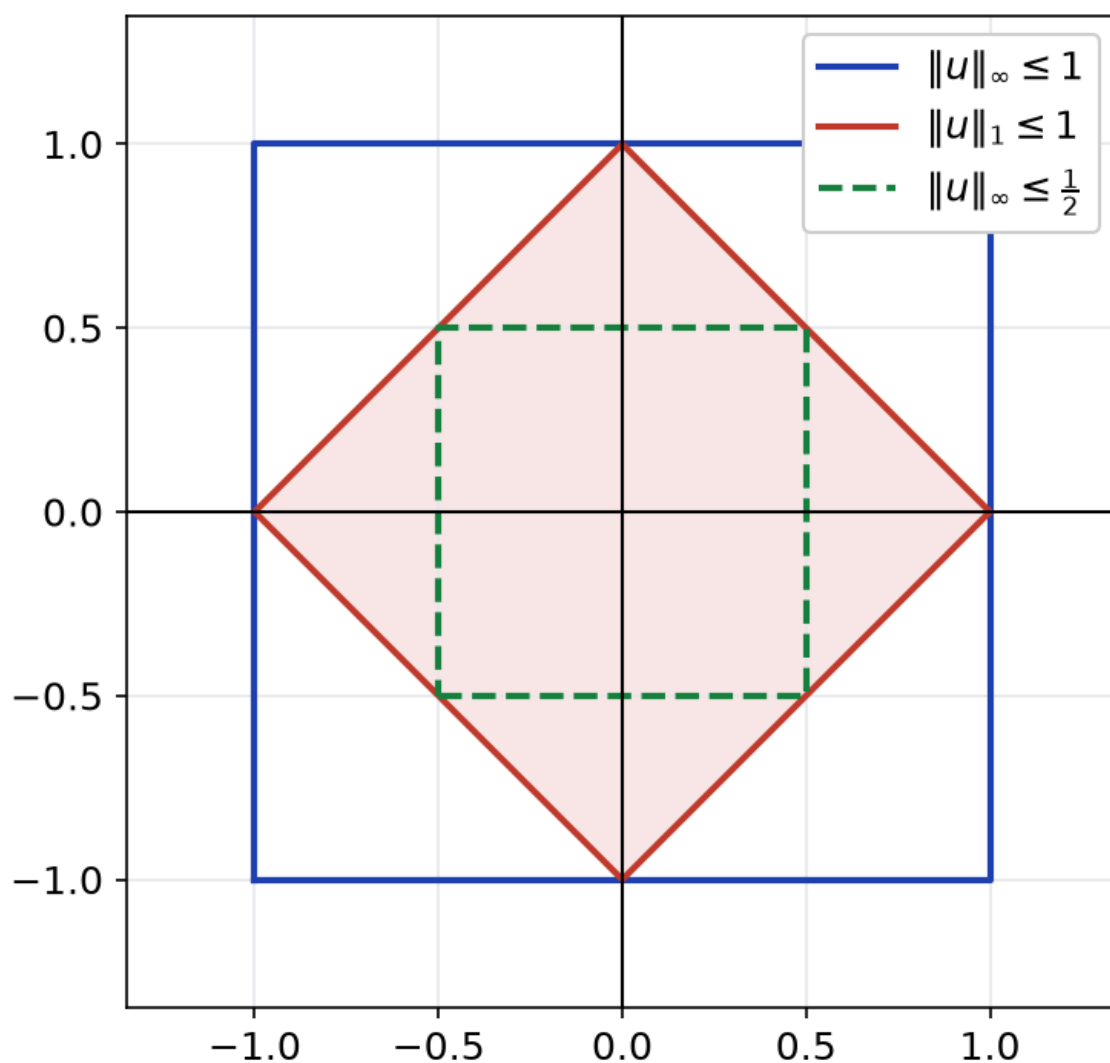
- c. Pour $n \geq 1$, $|g_n|_{\infty} = 1$, et $g'_n(x) = n x^{n-1}$ donne $|g'_n|_{\infty} = n$, donc $N(g_n) = 0 + n = n$. S'il existait $\beta > 0$ tel que $N \leq \beta \|\cdot\|_{\infty}$, on aurait $n \leq \beta$ pour tout n , ce qui est absurde. **Les normes N et $\|\cdot\|_{\infty}$ ne sont donc pas équivalentes.**

- d. Une fonction polynomiale est continue sur le segment $[0, 1]$, donc bornée : la borne supérieure existe. L'homogénéité et l'inégalité triangulaire se démontrent comme pour la norme de la convergence uniforme. Pour la séparation, si $\sup_{[0, 1]} |P| = 0$, alors P s'annule en tout point de $[0, 1]$. Il possède donc une infinité de racines. **Par conséquent $P = 0$, et l'application est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.**

Barème : a) 0,5 point pour homogénéité et inégalité triangulaire, 0,5 point pour la séparation ; b) 1 point ; c) 0,5 point pour les calculs, 0,5 point pour la conclusion ; d) 0,5 point pour l'existence, 0,5 point pour la séparation.

Exercice 3 : Boules unités dans le plan (3 points)

- a. La condition $\max(|x|, |y|) \leq 1$ équivaut à $-1 \leq x \leq 1$ et $-1 \leq y \leq 1$: B_∞ est le **carré plein de sommets** $(\pm 1, \pm 1)$. Dans le quadrant $x \geq 0, y \geq 0$, la condition $|x| + |y| \leq 1$ s'écrit $x + y \leq 1$, et les symétries par rapport aux axes donnent le reste : B_1 est le **losange plein de sommets** $(\pm 1, 0)$ et $(0, \pm 1)$.



- b. Pour $u = (x, y)$, on a $\max(|x|, |y|) \leq |x| + |y| \leq 2 \max(|x|, |y|)$. L'égalité a lieu à gauche pour $u = (1, 0)$ et à droite pour $u = (1, 1)$: les constantes sont optimales.

Si $\|u\|_\infty \leq \frac{1}{2}$, alors $\|u\|_1 \leq 2 \times \frac{1}{2} = 1$. Si $\|u\|_1 \leq 1$, alors $\|u\|_\infty \leq \|u\|_1 \leq 1$. **Donc**
 $B_\infty\left(0, \frac{1}{2}\right) \subset B_1 \subset B_\infty$, ce que montre la figure.

- c. Soient $u, v \in B_f(a, r)$ et $t \in [0, 1]$. Comme
 $(1-t)u + tv - a = (1-t)(u-a) + t(v-a)$, l'inégalité triangulaire et l'homogénéité
 donnent :

$$|(1-t)u + tv - a| \leq (1-t)|u-a| + t|v-a| \leq (1-t)r + tr = r.$$

Le point $(1-t)u + tv$ appartient à la boule : celle-ci est convexe.

Barème : a) 0,5 point par boule, avec la justification ; b) 0,5 point pour l'encadrement et l'optimalité, 0,5 point pour les inclusions ; c) 1 point.

Exercice 4 : Fonctions chapeaux et normes non équivalentes (4 points)

- a. Pour tout $t \in [0, 1]$, $|f(t)| \leq |f|_\infty$. Par croissance de l'intégrale,

$$|f|_1 \leq \int_0^1 |f|_\infty dt = |f|_\infty. \text{ **Donc** } |f|_1 \leq |f|_\infty.$$

- b. Sur $\left[0, \frac{2}{n}\right]$, f_n est continue comme composée de fonctions continues. En $x = \frac{2}{n}$, la première formule donne $1 - n \times \frac{1}{n} = 0$, valeur de la seconde : les deux expressions se raccordent, donc f_n est continue sur $[0, 1]$ (et $\frac{2}{n} \leq 1$ car $n \geq 2$).

La fonction f_n est affine croissante de 0 à 1 sur $\left[0, \frac{1}{n}\right]$, affine décroissante de 1 à 0 sur $\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$, puis nulle. Elle est positive et atteint son maximum 1 en $\frac{1}{n}$: $\|f_n\|_\infty = 1$.
L'intégrale est l'aire d'un triangle de base $\frac{2}{n}$ et de hauteur 1 : $\|f_n\|_1 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{n} \times 1 = \frac{1}{n}$.

- c. Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\|f\|_\infty \leq \alpha \|f\|_1$ pour tout $f \in F$. Avec $f = f_n$, on obtient $1 \leq \frac{\alpha}{n}$, soit $n \leq \alpha$ pour tout $n \geq 2$: c'est absurde.

Il n'existe pas de telle constante : les deux normes ne sont pas équivalentes, bien que $\|\cdot\|_1$ soit dominée par $\|\cdot\|_\infty$.

- d. Comme $\|f_n - 0\|_1 = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, (f_n) **converge vers la fonction nulle dans** $(F, \|\cdot\|_1)$.

Supposons que (f_n) converge vers g pour $\|\cdot\|_\infty$. Pour tout x , $|f_n(x) - g(x)| \leq \|f_n - g\|_\infty$, donc $f_n(x) \rightarrow g(x)$. Or $f_n(0) = 0$, et pour $x > 0$, $f_n(x) = 0$ dès que $n > \frac{2}{x}$. Ainsi $g = 0$, puis $\|f_n - g\|_\infty = 1$ ne tend pas vers 0 : contradiction. **La suite ne converge pas dans** $(F, \|\cdot\|_\infty)$.

Barème : a) 0,5 point ; b) 0,5 point pour la continuité, 0,5 point pour chaque norme ; c) 1 point ; d) 0,5 point pour chaque espace.

Erreur fréquente : conclure à la non-équivalence à partir de la seule inégalité $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$; c'est l'absence d'inégalité dans l'autre sens qu'il faut prouver.

Exercice 5 : Problème : suites de matrices et valeurs d'adhérence (6 points)

- a. Pour tous i, j , on a $|(M_k)_{ij} - L_{ij}| \leq N(M_k - L)$. Si $N(M_k - L) \rightarrow 0$, chaque coefficient converge donc vers celui de L .

Réciproquement, si les quatre suites de coefficients convergent, alors

$N(M_k - L) = \max_{i,j} |(M_k)_{ij} - L_{ij}|$ est le maximum de quatre suites de limite nulle : il tend vers 0. **La convergence pour N équivaut à la convergence coefficient par coefficient.**

- b. Un vecteur ℓ est une valeur d'adhérence de (x_k) s'il existe une application $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $x_{\sigma(k)} \rightarrow \ell$. Si $x_k \rightarrow \ell$, toute suite extraite converge aussi vers ℓ ; par unicité de la limite, ℓ est la seule valeur d'adhérence.

On calcule $A^2 = -I_2$, donc $A^4 = I_2$. Pour tout p , $A^{4p} = I_2$, $A^{4p+1} = A$, $A^{4p+2} = -I_2$ et $A^{4p+3} = -A$. Ces quatre suites extraites sont constantes : I_2 , A , $-I_2$ et $-A$ sont des valeurs d'adhérence de (A^k) . Elles sont distinctes, donc la suite (A^k) diverge.

- c. Comme $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, on a $B = \frac{\sqrt{2}}{2} R_{\pi/4}$. Par récurrence, grâce à $R_\theta R_\varphi = R_{\theta + \varphi}$, on obtient $R_{\pi/4}^k = R_{k\pi/4}$, donc :

$$B^k = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^k R_{k\pi/4}, \quad N(B^k) = 2^{-k/2} \max\left(\left|\cos \frac{k\pi}{4}\right|, \left|\sin \frac{k\pi}{4}\right|\right) \leq 2^{-k/2}.$$

Comme $2^{-k/2} \rightarrow 0$, la suite (B^k) converge vers la matrice nulle.

- d. Le signe de $(-1)^n$ dépend de la parité de n , et $\cos \frac{2n\pi}{3}$ ne dépend que du reste de n modulo 3. Pour $n = 6p + r$, on obtient :

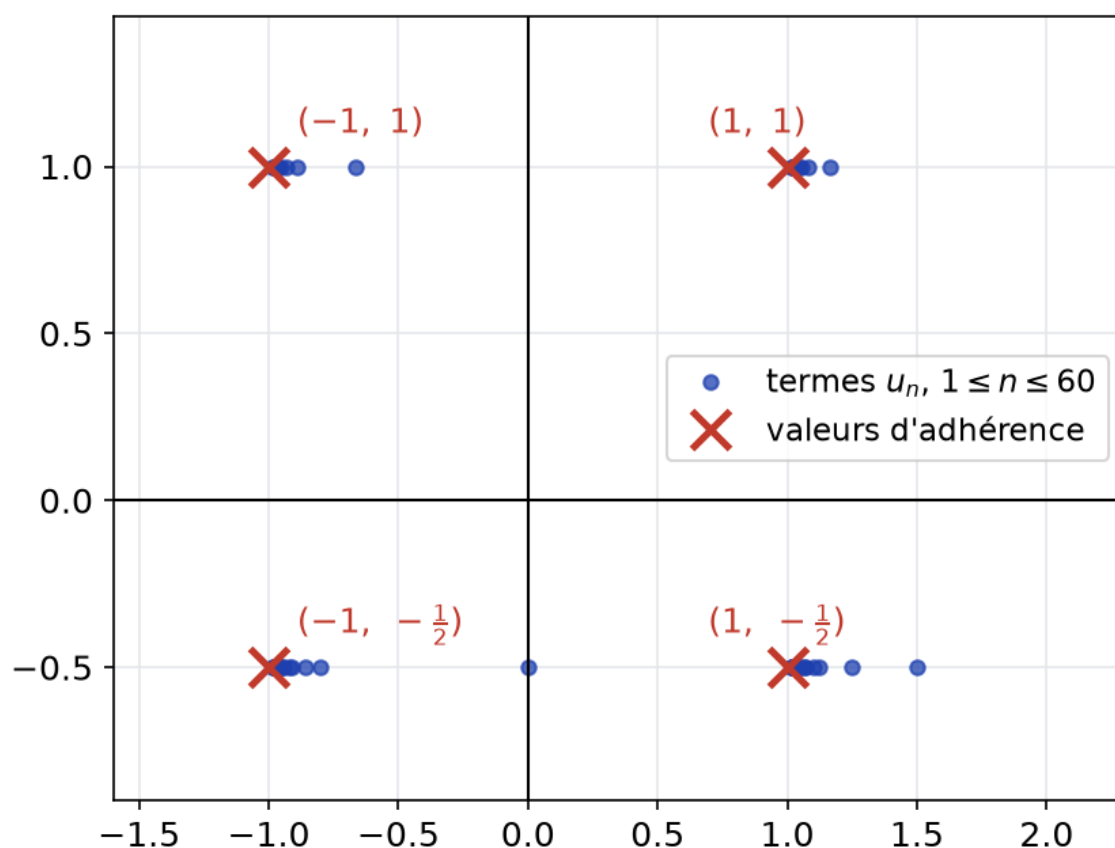
r	0	1	2	3	4	5
-----	---	---	---	---	---	---

$(-1)^n$	1	-1	1	-1	1	-1
$\cos \frac{2n\pi}{3}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

La première coordonnée de u_{6p+r} diffère de ± 1 de $\frac{1}{6p+r}$, qui tend vers 0, et la seconde est constante. Les suites extraites $(u_{6p+r})_p$ convergent donc vers $\ell_0 = (1, 1)$, $\ell_1 = \ell_5 = (-1, -\frac{1}{2})$, $\ell_2 = \ell_4 = (1, -\frac{1}{2})$ et $\ell_3 = (-1, 1)$.

Réciproquement, soit ℓ une valeur d'adhérence, limite de $(u_{\sigma(k)})$. Les six classes de restes modulo 6 recouvrent $\mathbb{N}$, donc l'une d'elles, disons r , contient $\sigma(k)$ pour une infinité de k . On en extrait une sous-suite de $(u_{\sigma(k)})$, qui converge vers ℓ , et qui est aussi extraite de $(u_{6p+r})_p$, donc converge vers ℓ_r . Par unicité de la limite, $\ell = \ell_r$.

L'ensemble des valeurs d'adhérence est $\left\{ \begin{array}{l} (1, 1), \\ (-1, 1), \\ (1, -\frac{1}{2}), \\ (-1, -\frac{1}{2}) \end{array} \right\}.$



Barème : a) 0,5 point par implication ; b) 0,5 point pour la définition et l'unicité, 0,5 point pour les puissances, 0,5 point pour la conclusion ; c) 0,5 point pour l'écriture $\rho \mathbb{R}_\theta$, 1 point pour la majoration et la limite ; d) 1 point pour les six suites extraites, 1 point pour l'absence d'autre valeur d'adhérence.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : normes, boules et normes équivalentes

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Espaces vectoriels normés](#) » en maths spé puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [espaces vectoriels normés](#).

Retrouvez tous les **[contrôles de maths spé classés par chapitre](#)**, ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).