

Corrigé du contrôle de maths spé : intégrales généralisées et intégrabilité

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : intégrales de Riemann et comparaison	4 points
Exercice 2 : Intégrabilité de $x^a \ln x$ sur $]0, 1]$	4 points
Exercice 3 : Une intégrale convergente non absolument	4 points
Exercice 4 : Intégration par parties et changement de variable	4 points
Exercice 5 : Problème : équivalent d'un reste d'intégrale	4 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : intégrales de Riemann et comparaison (4 points)

a. **Énoncé.** L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. L'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Démonstration. Pour $X > 1$ et $\alpha \neq 1$, on a $\int_1^X \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{X^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}$. Cette quantité a une limite finie, égale à $\frac{1}{\alpha-1}$, si $\alpha > 1$. Elle tend vers $+\infty$ si $\alpha < 1$. Pour $\alpha = 1$, l'intégrale vaut

$$\ln X \rightarrow +\infty.$$

De même, pour $\varepsilon \in]0,1[$ et $\alpha \neq 1$, $\int_{\varepsilon}^1 \frac{dt}{t^{\alpha}} = \frac{1 - \varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. Elle tend vers $\frac{1}{1-\alpha}$ si $\alpha < 1$, et vers $+\infty$ si $\alpha > 1$. Pour $\alpha = 1$, elle vaut $-\ln \varepsilon \rightarrow +\infty$. **Les deux critères sont démontrés.**

- b. **Énoncé.** Si $0 \leq f \leq g$ sur $[a,b[$ et si g est intégrable sur $[a,b[$, alors f est intégrable sur $[a,b[$ et $\int_a^b f \leq \int_a^b g$. Par contraposée, si f n'est pas intégrable, g non plus.

Démonstration. On pose $F(x) = \int_a^x f$ pour $x \in [a,b[$. Comme $f \geq 0$, F est croissante. De plus $F(x) \leq \int_a^x g \leq \int_a^b g$. Par le théorème de la limite monotone, F admet donc une limite finie en b . **Ainsi f est intégrable, avec $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.**

- c. Si f et g sont positives et continues par morceaux sur $[a,b[$, et si $f(x) \sim g(x)$ quand $x \rightarrow b$, alors **f est intégrable sur $[a,b[$ si et seulement si g l'est.**

Barème : a) 2 points : 1 point par critère (calcul sur un segment et discussion complète, cas $\alpha = 1$ compris) ; b) 1,5 point : 0,5 point pour l'énoncé, 1 point pour la preuve par la limite monotone ; c) 0,5 point.

Exercice 2 : Intégrabilité de $x^a \ln x$ sur $]0, 1]$ (4 points)

- a. La fonction f_a est continue sur $]0,1]$: seule la borne 0 pose problème. On étudie $|f_a(x)| = x^a |\ln x|$.

Cas $a > -1$. On pose $c = \frac{a-1}{2}$, qui vérifie $-1 < c < a$. Alors

$\frac{x^a |\ln x|}{x^c} = x^{(a+1)/2} |\ln x| \rightarrow 0$ par croissances comparées, car $\frac{a+1}{2} > 0$. Donc $|f_a(x)| = o(x^c)$ en 0 . Or $x \rightarrow x^c = \frac{1}{x^{-c}}$ est intégrable sur $]0,1]$, puisque $-c < 1$ (critère de Riemann). Par comparaison, f_a est intégrable.

Cas $a \leq -1$. Pour $x \in]0, e^{-1}]$, on a $|\ln x| \geq 1$ et $x^a \geq x^{-1}$ car $x \leq 1$. Donc $|f_a(x)| \geq \frac{1}{x}$, qui n'est pas intégrable en 0 . Par comparaison, f_a n'est pas intégrable.

Ainsi f_a est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $a > -1$.

b. Soit $a > -1$ et $\varepsilon \in]0,1[$. On intègre par parties sur le segment $[\varepsilon, 1]$, en dérivant $\ln x$ et en primitivant x^a en $\frac{x^{a+1}}{a+1}$:

$$\int_{\varepsilon}^1 x^a \ln x \, dx = \left[\frac{x^{a+1}}{a+1} \ln x \right]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 \frac{x^a}{a+1} \, dx = -\frac{\varepsilon^{a+1} \ln \varepsilon}{a+1} - \frac{1 - \varepsilon^{a+1}}{(a+1)^2}.$$

Comme $a+1 > 0$, on a $\varepsilon^{a+1} \rightarrow 0$ et $\varepsilon^{a+1} \ln \varepsilon \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Par conséquent :

$$\int_0^1 x^a \ln x \, dx = -\frac{1}{(a+1)^2}.$$

Par exemple, pour $a = 0$, on retrouve $\int_0^1 \ln x \, dx = -1$.

Erreur fréquente : intégrer par parties directement sur $]0,1]$ sans vérifier que le crochet a une limite finie en 0 .

Barème : a) 2 points : 1 point pour le cas $\alpha > -1$ (fonction de comparaison et critère de Riemann), 1 point pour le cas $\alpha \leq -1$; b) 2 points : 1 point pour l'intégration par parties sur le segment, 1 point pour le passage à la limite et le résultat.

Exercice 3 : Une intégrale convergente non absolument (4 points)

- a. Pour $X \geq 1$, les fonctions $x \rightarrow \frac{1}{x}$ et $x \rightarrow -\cos x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, X]$. Par intégration par parties :

$$\int_1^X \frac{\sin x}{x} dx = \left[-\frac{\cos x}{x} \right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos x}{x^2} dx = \cos 1 - \frac{\cos X}{X} - \int_1^X \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

D'une part, $\frac{\cos X}{X} \rightarrow 0$. D'autre part, $\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$, intégrable sur $[1, +\infty[$: la dernière intégrale a donc une limite finie. **Ainsi** $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ **converge**.

- b. Comme $|\sin x| \leq 1$, on a $\sin^2 x = |\sin x| \cdot |\sin x| \leq |\sin x|$. Ensuite, $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$. Donc, pour $X \geq 1$:

$$\int_1^X \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{1}{2} \int_1^X \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int_1^X \frac{\cos 2x}{x} dx.$$

La même intégration par parties qu'en a) montre que $\int_1^X \frac{\cos 2x}{x} dx$ a une limite finie. En

revanche, $\frac{1}{2} \ln X \rightarrow +\infty$. Le membre de droite tend donc vers $+\infty$. **Par conséquent,**

$x \rightarrow \frac{\sin x}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$: l'intégrale est semi-convergente.

c. L'intégration par parties de a), menée sur $[X, Y]$ puis avec $Y \rightarrow +\infty$, donne

$$R(X) = \frac{\cos X}{X} - \int_X^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt. \text{ Or } \left| \int_X^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt \right| \leq \int_X^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{X}. \text{ Donc}$$

$$|R(X)| \leq \frac{1}{X} + \frac{1}{X} = \frac{2}{X}.$$

Barème : a) 1,5 point : 0,5 point pour l'intégration par parties, 1 point pour les deux limites justifiées ; b) 2 points : 0,5 point pour l'inégalité, 0,5 point pour la convergence de l'intégrale en cosinus, 1 point pour la divergence et la conclusion ; c) 0,5 point.

Exercice 4 : Intégration par parties et changement de variable **(4 points)**

a. La fonction $t \rightarrow t^n e^{-t}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$. De plus, $t^2 \cdot t^n e^{-t} \rightarrow 0$ par croissances comparées, donc $t^n e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$. La fonction $t \rightarrow \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ par le critère de Riemann. **Par comparaison, I_n est bien définie.**

b. Pour $X > 0$, on intègre par parties sur $[0, X]$:

$$\int_0^X t^{n+1} e^{-t} dt = \left[-t^{n+1} e^{-t} \right]_0^X + (n+1) \int_0^X t^n e^{-t} dt.$$

Le crochet vaut $-X^{n+1}e^{-X}$, qui tend vers 0. En faisant tendre X vers $+\infty$, on obtient

$I_{n+1} = (n+1) I_n$. Comme $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$, une récurrence immédiate donne le résultat. **Donc $I_n = n!$ pour tout n .**

- c. L'application $\varphi : u \rightarrow u^2$ est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$, de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante. Le théorème de changement de variable affirme alors que

$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ et $\int_0^{+\infty} u^{2n} e^{-u^2} 2u du$ sont de même nature et égales en cas de convergence. Par conséquent :

$$n! = 2 \int_0^{+\infty} u^{2n+1} e^{-u^2} du.$$

Donc $\int_0^{+\infty} u^{2n+1} e^{-u^2} du = \frac{n!}{2}$. Pour $n = 0$, on retrouve bien

$$\int_0^{+\infty} u e^{-u^2} du = \left[-\frac{e^{-u^2}}{2} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

Barème : a) 1 point ; b) 1,5 point : 1 point pour la relation (crochet justifié), 0,5 point pour $I_n = n!$; c) 1,5 point : 0,5 point pour les hypothèses du changement de variable, 1 point pour le calcul.

Exercice 5 : Problème : équivalent d'un reste d'intégrale (4 points)

- a. La fonction $t \rightarrow e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Pour $t \geq 1$, on a $t^2 \geq t$, donc $0 < e^{-t^2} \leq e^{-t}$, fonction intégrable. Elle est donc intégrable sur $[0, +\infty[$, et $R(x)$ est bien défini. Ensuite, $R(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt - \int_0^x e^{-t^2} dt$. Par le théorème fondamental de l'analyse, **R est de classe $\mathcal{C}^1$ et $R'(x) = -e^{-x^2}$.**

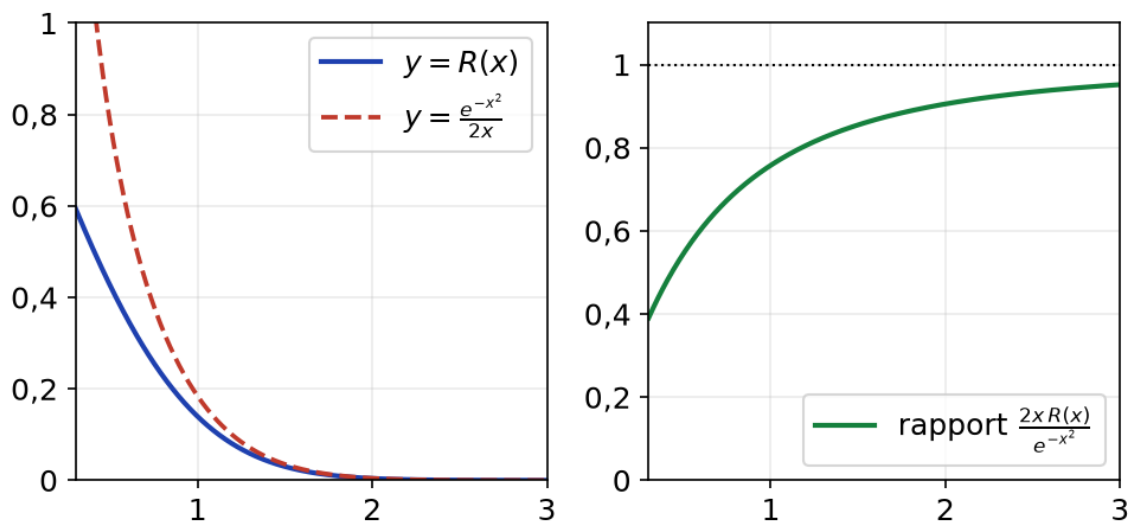
- b. Soit $0 < x < X$. On écrit $e^{-t^2} = \frac{1}{2t} \cdot 2t e^{-t^2}$ et on intègre par parties sur $[x, X]$:

$$\int_x^X e^{-t^2} dt = \left[-\frac{e^{-t^2}}{2t} \right]_x^X - \int_x^X \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt.$$

Quand $X \rightarrow +\infty$, le crochet tend vers $\frac{e^{-x^2}}{2x}$, et l'intégrale converge car $\frac{e^{-t^2}}{2t^2} \leq \frac{e^{-t^2}}{2x^2}$.
D'où la formule annoncée. De plus :

$$0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt \leq \frac{1}{2x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{R(x)}{2x^2}.$$

Ainsi $\frac{e^{-x^2}}{2x} = R(x)(1 + \theta(x))$, avec $0 \leq \theta(x) \leq \frac{1}{2x^2}$, donc $\theta(x) \rightarrow 0$. **Par conséquent**
 $R(x) \sim \frac{e^{-x^2}}{2x}$ **quand** $x \rightarrow +\infty$.



- c. La fonction R est positive et continue sur $[0, +\infty[$. On intègre par parties sur $[0, X]$, en dérivant R et en primitivant 1 en x :

$$\int_0^X R(x) dx = [x R(x)]_0^X + \int_0^X x e^{-x^2} dx = X R(X) + \frac{1 - e^{-X^2}}{2}.$$

D'après b), $X R(X) \sim \frac{e^{-X^2}}{2} \rightarrow 0$. Le membre de droite tend donc vers $\frac{1}{2}$. **Ainsi**
 $\int_0^{+\infty} R(x) dx$ **converge et vaut** $\frac{1}{2}$.

Barème : a) 1 point : 0,5 point pour l'intégrabilité, 0,5 point pour la dérivée ; b) 2 points : 1 point pour l'intégration par parties et le passage à la limite, 1 point pour l'encadrement et l'équivalent ; c) 1 point : 0,5 point pour l'intégration par parties, 0,5 point pour la limite.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : intégrales généralisées et intégrabilité

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Intégrales généralisées](#) » en maths spé puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [intégrales généralisées](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths spé classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).