

Corrigé du contrôle de maths spé : intégrales à paramètre et fonction Gamma

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : régularité d'une intégrale à paramètre	3 points
Exercice 2 : Une intégrale gaussienne à paramètre	5 points
Exercice 3 : Une transformée de Laplace	4 points
Exercice 4 : Problème : la fonction Gamma d'Euler	8 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : régularité d'une intégrale à paramètre (3 points)

a. **Théorème de continuité sous le signe intégrale.** On suppose :

- pour tout $t \in I$, la fonction $x \rightarrow f(x, t)$ est continue sur A ;
- pour tout $x \in A$, la fonction $t \rightarrow f(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- **hypothèse de domination** : il existe $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$ pour tout $(x, t) \in A \times I$.

Alors, pour tout $x \in A$, $t \rightarrow f(x, t)$ est intégrable sur I et g **est définie et continue sur A** . Il suffit que la domination ait lieu sur tout segment inclus dans A (domination locale).

b. **Théorème de dérivation sous le signe intégrale.** On suppose :

- pour tout $x \in A$, $t \rightarrow f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;
- f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ sur $A \times I$, continue par rapport à x et continue par morceaux par rapport à t ;
- il existe φ intégrable sur I telle que $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$ pour tout $(x, t) \in A \times I$ (ou sur tout segment de A).

Alors g **est de classe C^1 sur A et $g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$** .

c. Supposons qu'une telle φ existe. Pour $t \geq 0$ fixé, $e^{-xt} \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 0^+$, donc en passant à la limite dans $e^{-xt} \leq \varphi(t)$, on obtient $\varphi(t) \geq 1$ pour tout $t \geq 0$. Alors

$\int_0^X \varphi \geq X$ tend vers $+\infty$: φ n'est pas intégrable, contradiction. **Aucune domination globale sur $]0, +\infty[$ n'existe.**

La continuité est une propriété locale. Soit $a > 0$. Pour $x \geq a$ et $t \geq 0$, $0 < e^{-xt} \leq e^{-at}$, et $t \rightarrow e^{-at}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Le théorème de a) appliqué avec $A = [a, +\infty[$ montre que h est continue sur $[a, +\infty[$. Comme $]0, +\infty[$ est la réunion des $[a, +\infty[$ pour $a > 0$, h **est continue sur $]0, +\infty[$** (ce qui est cohérent avec $h(x) = \frac{1}{x}$).

Barème : a) 0,5 point pour les hypothèses de régularité, 0,5 point pour la domination et la conclusion ; b) 0,5 point pour les hypothèses, 0,5 point pour la formule de g' ; c) 0,5 point pour l'absence de domination globale, 0,5 point pour l'argument de domination sur $[a, +\infty[$.

Exercice 2 : Une intégrale gaussienne à paramètre (5 points)

a. Posons $f(x, t) = e^{-t^2} \cos(xt)$ sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$. Cette fonction est continue par rapport à x et par rapport à t . Pour tout (x, t) , $|f(x, t)| \leq e^{-t^2}$. La fonction $t \rightarrow e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $t^2 e^{-t^2} \rightarrow 0$ en $+\infty$, donc $e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$: elle est intégrable sur $[0, +\infty[$. Par le théorème de continuité sous le signe intégrale, **F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.**

b. Pour tout t , $x \rightarrow f(x, t)$ est dérivable et $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -t e^{-t^2} \sin(xt)$, fonction continue en x et en t . De plus $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq t e^{-t^2}$, et $t \rightarrow t e^{-t^2}$ est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$ (car $t^3 e^{-t^2} \rightarrow 0$). Cette domination ne dépend pas de x . Avec a), le théorème de dérivation sous le signe intégrale s'applique : **F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et**

$$F'(x) = - \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} \sin(xt) dt.$$

c. Fixons x . Posons $u(t) = \sin(xt)$ et $v(t) = \frac{1}{2} e^{-t^2}$, de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, avec $u'(t) = x \cos(xt)$ et $v'(t) = -t e^{-t^2}$. Le produit uv vaut 0 en 0 et tend vers 0 en $+\infty$ (produit d'une fonction bornée par une fonction de limite nulle). L'intégration par parties sur un intervalle semi-ouvert est donc légitime : les intégrales $\int_0^{+\infty} u v'$ et $\int_0^{+\infty} u' v$ sont de même nature (ici convergentes) et

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} u(t) v'(t) dt = \left[u v \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x \cos(xt) \frac{1}{2} e^{-t^2} dt.$$

Le crochet est nul, donc $F'(x) = -\frac{x}{2} F(x)$ pour tout réel x .

d. F est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire $y' + \frac{x}{2} y = 0$, dont les solutions sont les $x \rightarrow C e^{-x^2/4}$, $C \in \mathbb{R}$. Comme $F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, on obtient

$$F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2/4} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Erreur fréquente : dominer $\frac{\partial f}{\partial x}$ par $|x| t e^{-t^2}$, qui dépend de x . La majoration $|\sin(xt)| \leq 1$ donne directement une domination uniforme.

Barème : a) 0,5 point pour la domination, 0,5 point pour l'intégrabilité de e^{-t^2} ; b) 0,5 point pour la

dérivée partielle, 0,5 point pour la domination indépendante de x , 0,5 point pour la conclusion ; c) 0,5 point pour le choix de u et v , 0,5 point pour la justification du crochet, 0,5 point pour la relation ; d) 0,5 point pour la résolution, 0,5 point pour la constante.

Exercice 3 : Une transformée de Laplace (4 points)

a. Posons $f(x, t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ sur $[0, +\infty[\times [0, +\infty[$, continue en x et en t . Pour tout (x, t) , $0 < f(x, t) \leq \frac{1}{1+t^2}$, fonction intégrable sur $[0, +\infty[$. Par le théorème de continuité, G est définie et continue sur $[0, +\infty[$, et $G(0) = \left[\arctan t \right]_0^{+\infty}$, soit $G(0) = \frac{\pi}{2}$.

b. Pour $k \in \{1, 2\}$, $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) = \frac{(-t)^k e^{-xt}}{1+t^2}$, continue en x et en t . Soit $a > 0$. Pour $x \geq a$ et $t \geq 0$:

$$\left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \frac{t^k e^{-at}}{1+t^2} \leq t^k e^{-at},$$

et $t \rightarrow t^k e^{-at}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ car $t^{k+2} e^{-at} \rightarrow 0$ en $+\infty$. Comme de plus $t \rightarrow f(x, t)$ et $t \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ sont intégrables, le théorème de classe C^k des intégrales à paramètre (dominations sur $[a, +\infty[$) montre que G est de classe C^2 sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc G est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$, avec

$$G''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} dt. \text{ Par linéarité de l'intégrale (les deux intégrales convergent) :}$$

$$G''(x) + G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(t^2 + 1) e^{-xt}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}.$$

Donc $G'' + G = \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

c. Pour $x > 0$ et $t \geq 0$, $0 \leq \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq e^{-xt}$, donc par croissance de l'intégrale

$$0 \leq G(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}. \text{ Par encadrement, } G(x) \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow +\infty.$$

- d. Soit $x > 0$. Le changement de variable $u = xt$, bijection C^1 strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur lui-même, donne

$$x G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-xt}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+u^2/x^2} du.$$

Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs tendant vers $+\infty$ et $g_n(u) = \frac{e^{-u}}{1+u^2/x_n^2}$. Les g_n sont continues, la suite (g_n) converge simplement vers $u \rightarrow e^{-u}$, continue, et $|g_n(u)| \leq e^{-u}$, intégrable sur $[0, +\infty[$ et indépendante de n . Par le **théorème de**

convergence dominée, $\int_0^{+\infty} g_n \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-u} du = 1$. Par la caractérisation séquentielle de la limite, $x G(x) \rightarrow 1$, c'est-à-dire $G(x) \sim \frac{1}{x}$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Barème : a) 0,5 point pour la domination, 0,5 point pour $G(0)$; b) 0,5 point pour les dominations sur $[a, +\infty[$, 0,5 point pour le passage à $]0, +\infty[$, 0,5 point pour la relation ; c) 0,5 point ; d) 0,5 point pour le changement de variable, 0,5 point pour la convergence dominée avec hypothèses vérifiées.

Exercice 4 : Problème : la fonction Gamma d'Euler (8 points)

- a. La fonction $\varphi_x : t \rightarrow t^{x-1}e^{-t}$ est continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$.

- En $+\infty$: $t^2 \varphi_x(t) = t^{x+1}e^{-t} \rightarrow 0$ par croissances comparées, donc $\varphi_x(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et φ_x est intégrable sur $[1, +\infty[$, quel que soit x .
- En 0 : $\varphi_x(t) \sim t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$. Les fonctions étant positives, le théorème de comparaison par équivalents et le critère de Riemann donnent : φ_x est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $1-x < 1$, c'est-à-dire $x > 0$.

Γ est définie exactement sur $]0, +\infty[$.

- b. Soit $x > 0$. On intègre par parties sur $]0, +\infty[$ avec $u(t) = t^x$ et $v(t) = -e^{-t}$, de

classe C^1 . Le produit $uv(t) = -t^x e^{-t}$ tend vers 0 en 0^+ (car $x > 0$) et en $+\infty$ (croissances comparées). Les intégrales étant convergentes d'après a) :

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = \left[-t^x e^{-t} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt = x \Gamma(x).$$

Comme $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$, une récurrence immédiate donne $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. Posons $f(x, t) = t^{x-1} e^{-t} = e^{(x-1)\ln t} e^{-t}$ sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. Pour t fixé, $x \rightarrow f(x, t)$ est de classe C^∞ et $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) = (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t}$, fonction continue en x et en t .

Domination sur un segment. Soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$ et $x \in [a, b]$. Si $0 < t \leq 1$, $t^{x-1} \leq t^{a-1}$; si $t \geq 1$, $t^{x-1} \leq t^{b-1}$. Donc, pour tout $t > 0$:

$$\left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \psi_k(t) = |\ln t|^k (t^{a-1} + t^{b-1}) e^{-t}.$$

Intégrabilité de ψ_k . Elle est continue et positive sur $]0, +\infty[$. En $+\infty$, $t^2 \psi_k(t) \rightarrow 0$. En 0 , $|\ln t|^k t^{a/2} \rightarrow 0$, donc $|\ln t|^k t^{a-1} = o(t^{a/2-1})$, intégrable en 0 par Riemann car $1 - \frac{a}{2} < 1$; le terme en t^{b-1} se traite de même puisque $b \geq a$. Donc ψ_k est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Le théorème de classe C^∞ des intégrales à paramètre (domination de chaque dérivée partielle sur tout segment) montre que Γ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} dt.$$

d. D'après c), $\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt$ est l'intégrale d'une fonction continue,

positive et non identiquement nulle, donc $\Gamma''(x) > 0$: Γ est (strictement) convexe.

Posons $p(t) = t^{(x-1)/2} e^{-t/2}$ et $q(t) = \ln t \cdot t^{(x-1)/2} e^{-t/2}$. Les fonctions p^2 et q^2 sont les intégrandes de $\Gamma(x)$ et $\Gamma''(x)$, donc p et q sont de carré intégrable sur

$]0, +\infty[$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\left(\int_0^{+\infty} p q \right)^2 \leq \int_0^{+\infty} p^2 \int_0^{+\infty} q^2, \text{ soit } \Gamma'(x)^2 \leq \Gamma(x) \Gamma''(x).$$

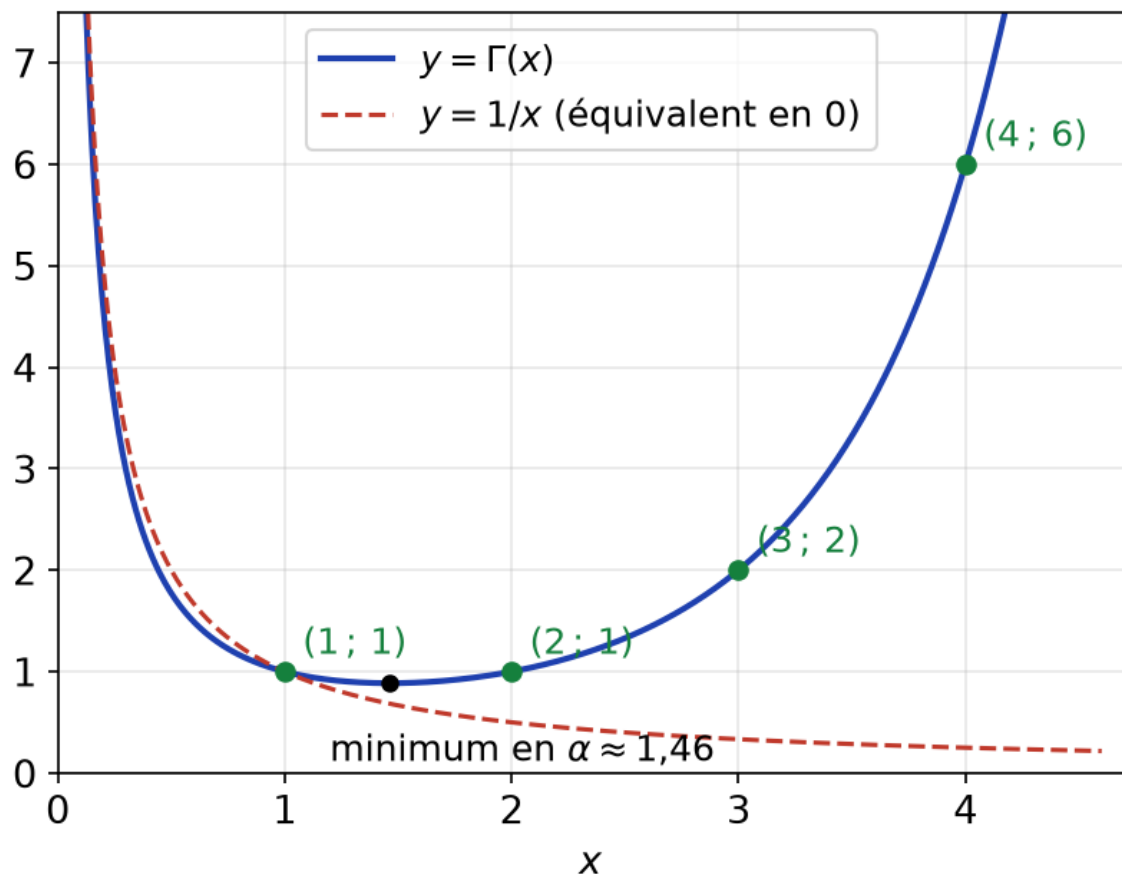
Comme $\Gamma > 0$, $\ln \Gamma$ est de classe C^2 et $(\ln \Gamma)'' = \frac{\Gamma \Gamma'' - \Gamma'^2}{\Gamma^2} \geq 0$: $\ln \Gamma$ **est convexe sur** $]0, +\infty[$ (on dit que Γ est log-convexe).

- e. Γ est continue sur $[1, 2]$, dérivable sur $]1, 2[$ et $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. Par le théorème de Rolle, il existe $\alpha \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(\alpha) = 0$. Comme $\Gamma'' > 0$, Γ' est strictement croissante, donc α **est l'unique zéro de** Γ' , avec $\Gamma' < 0$ sur $]0, \alpha[$ et $\Gamma' > 0$ sur $]\alpha, +\infty[$.

Limite en $+\infty$: Γ est croissante sur $[\alpha, +\infty[$ et $\Gamma(n+1) = n! \rightarrow +\infty$, donc Γ n'est pas majorée sur cet intervalle et $\Gamma(x) \rightarrow +\infty$ **quand** $x \rightarrow +\infty$. En 0^+ , f) donne aussi la limite $+\infty$.

x	0		α		$+\infty$
$\Gamma'(x)$		—	0	+	
$\Gamma(x)$	$+\infty$	décroissante	$\Gamma(\alpha)$	croissante	$+\infty$

Numériquement, $\alpha \approx 1,46$ et $\Gamma(\alpha) \approx 0,886$ (valeurs non exigées).



f. Pour $x > 0$, b) donne $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$. Comme Γ est continue en 1 d'après c), $\Gamma(x+1) \rightarrow \Gamma(1) = 1$ quand $x \rightarrow 0^+$. Donc $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$ quand $x \rightarrow 0^+$.

g. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt$. Le changement de variable $t = u^2$, bijection C^1 strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur lui-même, avec $dt = 2u du$, donne

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u} e^{-u^2} 2u du = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

Donc $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, puis $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, soit $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$.

Erreur fréquente : chercher une domination de $t^{x-1}e^{-t}$ valable sur tout $]0, +\infty[$: elle n'existe pas, car en 0 la borne t^{x-1} n'est pas intégrable quand x est proche de 0. Il faut travailler sur un

segment $[a, b]$.

Barème : a) 0,5 point pour l'étude en $+\infty$, 0,5 point pour l'étude en 0 ; b) 0,5 point pour l'intégration par parties justifiée, 0,5 point pour $n!$; c) 0,5 point pour les dérivées partielles, 0,5 point pour la domination, 0,5 point pour l'intégrabilité de ψ_x , 0,5 point pour la conclusion ; d) 0,5 point pour la convexité, 0,5 point pour Cauchy-Schwarz, 0,5 point pour la log-convexité ; e) 0,5 point pour Rolle et l'unicité, 0,5 point pour le tableau et la limite ; f) 0,5 point ; g) 0,5 point pour $\Gamma(1/2)$, 0,5 point pour $\Gamma(5/2)$.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : intégrales à paramètre et fonction Gamma

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours [« Intégrales à paramètre » en maths spé](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [intégrales à paramètre](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths spé classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).