

Corrigé du contrôle de maths spé : fonctions vectorielles, dérivation et Taylor

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : dérivée d'une expression bilinéaire	4 points
Exercice 2 : Dérivée d'un déterminant	5 points
Exercice 3 : Accroissements finis et sommes de Riemann	5 points
Exercice 4 : Formules de Taylor et inégalité de Landau	6 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : dérivée d'une expression bilinéaire (4 points)

a. **Énoncé.** La fonction $\varphi : t \rightarrow B(f(t), g(t))$ est dérivable sur I et, pour tout $t \in I$:

$$\varphi'(t) = B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t)).$$

Démonstration. Soit $t \in I$ et $h \neq 0$ tel que $t + h \in I$. Par bilinéarité :

$$\varphi(t+h) - \varphi(t) = B(f(t+h) - f(t), g(t+h)) + B(f(t), g(t+h) - g(t)).$$

On divise par h . D'abord, $\frac{f(t+h)-f(t)}{h} \rightarrow f'(t)$ et $g(t+h) \rightarrow g(t)$, car g est dérivable donc continue. Ensuite, le couple $\left(\frac{f(t+h)-f(t)}{h}, g(t+h)\right)$ tend vers $(f'(t), g(t))$ et B est continue : le premier terme divisé par h tend donc vers $B(f'(t), g(t))$. De même, le second tend vers $B(f(t), g'(t))$. **La formule est démontrée.**

b. Le produit scalaire est bilinéaire sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Donc

$$\frac{d}{dt} \langle f(t), g(t) \rangle = \langle f'(t), g(t) \rangle + \langle f(t), g'(t) \rangle. \text{ Avec } g = f \text{ et par symétrie :}$$

$$\frac{d}{dt} |f(t)|^2 = 2 \langle f'(t), f(t) \rangle.$$

Si $|f|$ est constante, alors $|f|^2$ l'est aussi et sa dérivée est nulle. **Ainsi** $\langle f'(t), f(t) \rangle = 0$: $f'(t)$ **est orthogonal à** $f(t)$ **pour tout** t .

Barème : a) 2,5 points : 0,5 point pour l'énoncé, 1 point pour la décomposition bilinéaire, 1 point pour le passage à la limite justifié (continuité de B et de g) ; b) 1,5 point : 0,5 point par dérivée, 0,5 point pour l'orthogonalité.

Exercice 2 : Dérivée d'un déterminant (5 points)

a. Chaque coefficient m_{ij} est dérivable, puisque M l'est. Chaque produit $\prod_j m_{\sigma(j),j}$ est donc dérivable, et la règle de dérivation d'un produit donne :

$$\left(\prod_{j=1}^n m_{\sigma(j),j} \right)' = \sum_{j=1}^n m'_{\sigma(j),j} \prod_{k \neq j} m_{\sigma(k),k}.$$

On multiplie par $\varepsilon(\sigma)$, on somme sur σ , puis on échange les deux sommes finies. Pour chaque j , on reconnaît la formule de Leibniz du déterminant de la matrice obtenue en remplaçant la colonne C_j par C'_j . **Donc $\det M$ est dérivable et**

$$(\det M)' = \sum_{j=1}^n \det(C_1, \dots, C'_j, \dots, C_n).$$

- b. En $t = 0$, on a $C_k(0) = e_k$, le k -ième vecteur de la base canonique. Le déterminant $\det(e_1, \dots, C'_j(0), \dots, e_n)$ se développe par rapport aux lignes autres que la j -ième : il vaut la j -ième coordonnée de $C'_j(0)$, c'est-à-dire $m'_{jj}(0)$. **En sommant,**

$$(\det M)'(0) = \sum_{j=1}^n m'_{jj}(0) = \operatorname{tr} M'(0).$$

- c. On développe selon la première ligne :

$$\det M(t) = (1+t)((1+2t) - t^2) - t(t^2(1+2t) - 0) + 0.$$

D'une part, $(1+t)(1+2t-t^2) = 1+3t+t^2-t^3$. D'autre part, $t \cdot t^2(1+2t) = t^3+2t^4$. Par conséquent :

$$\det M(t) = 1 + 3t + t^2 - 2t^3 - 2t^4.$$

Sa dérivée en 0 vaut 3. Or $M(0) = I_3$ et $M'(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, de trace $1+0+2=3$. **On retrouve bien** $(\det M)'(0) = \operatorname{tr} M'(0) = 3$.

- d. La fonction $M(t) = I_n + tA$ est dérivable, avec $M(0) = I_n$ et $M'(0) = A$. D'après b), $\psi(t) = \det(I_n + tA)$ vérifie $\psi(0) = 1$ et $\psi'(0) = \operatorname{tr} A$. Le développement limité

à l'ordre 1 d'une fonction dérivable donne alors : $\det(I_n + tA) = 1 + t \operatorname{tr} A + o(t)$.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 point pour la dérivée du produit, 1 point pour la réorganisation en déterminants ; b) 1 point ; c) 1,5 point : 1 point pour le déterminant, 0,5 point pour la vérification ; d) 1 point.

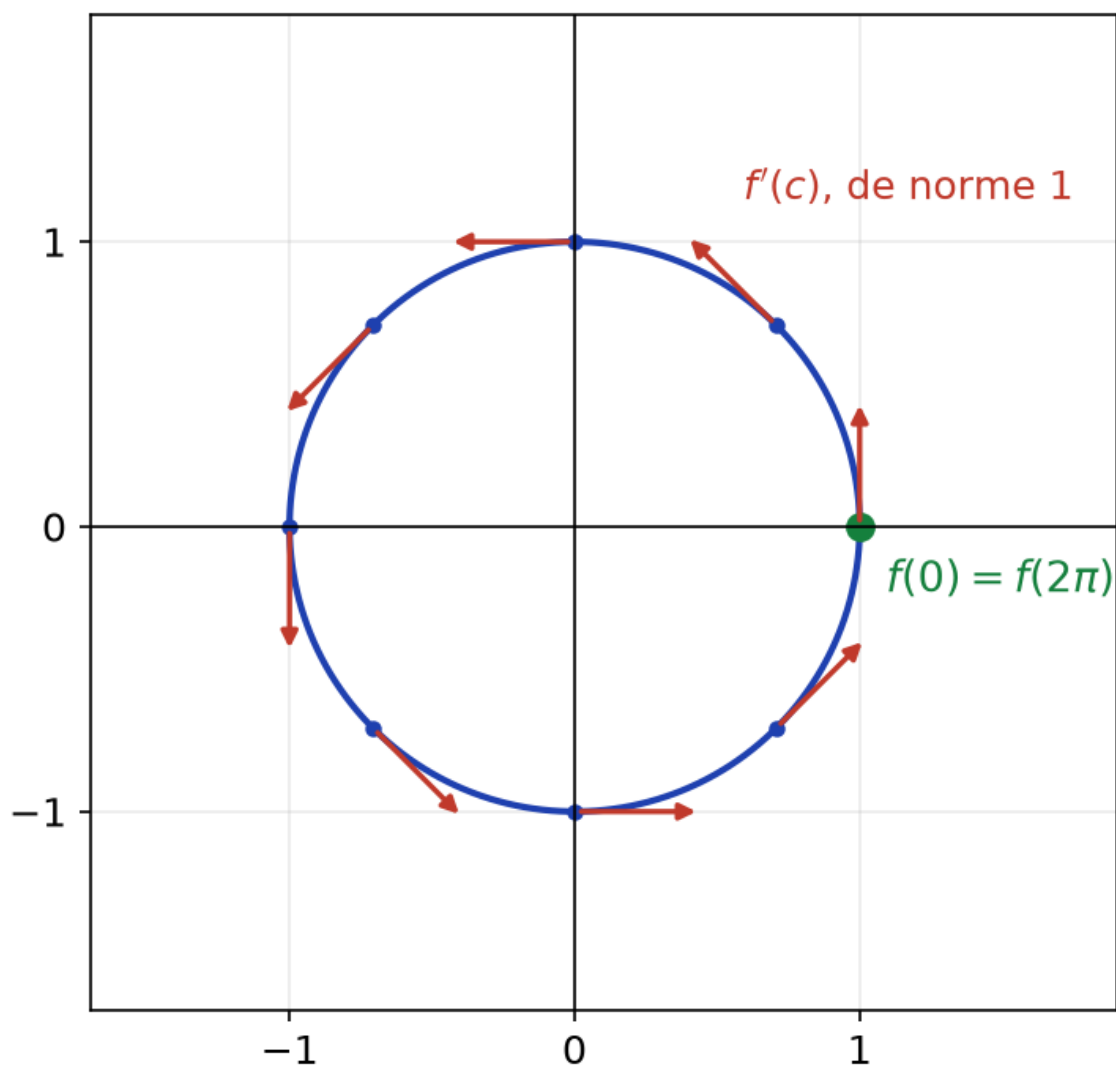
Exercice 3 : Accroissements finis et sommes de Riemann (5 points)

- a. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, le théorème fondamental de l'analyse, appliqué coordonnée par coordonnée, donne $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt$. Ensuite, l'inégalité triangulaire pour les intégrales vectorielles donne :

$$|f(b) - f(a)| = \left\| \int_a^b f'(t) dt \right\| \leq \int_a^b |f'(t)| dt \leq \int_a^b M dt.$$

Donc $|f(b) - f(a)| \leq M(b-a)$.

- b. On a $f(2\pi) - f(0) = (1,0) - (1,0) = 0$. Or $f'(c) = (-\sin c, \cos c)$ est de norme 1 pour tout c . Il ne s'annule donc jamais. **Aucun c ne vérifie $f(2\pi) - f(0) = 2\pi f'(c)$: l'égalité des accroissements finis est fausse pour les fonctions vectorielles.**



- c. D'après l'exercice 1, φ est dérivable et $\varphi'(t) = e^{-2t}(2\langle f'(t), f(t) \rangle - 2|f(t)|^2)$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis l'hypothèse :

$$\langle f'(t), f(t) \rangle \leq |f'(t)| |f(t)| \leq |f(t)|^2.$$

Donc $\varphi'(t) \leq 0$: la fonction φ est décroissante sur $[0,1]$. Or $\varphi(0) = 0$ et $\varphi \geq 0$. Ainsi $0 \leq \varphi(t) \leq \varphi(0) = 0$, donc $\varphi = 0$. **Par conséquent** $|f(t)| = 0$ **pour tout** t : **f est la fonction nulle.**

- d. La fonction $g : t \rightarrow (\cos \pi t, \sin \pi t)$ est continue sur $[0,1]$. Or les sommes de Riemann d'une fonction vectorielle continue convergent vers son intégrale, car c'est vrai pour chaque coordonnée. Donc :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g\left(\frac{k}{n}\right) \longrightarrow \int_0^1 g(t) dt = \left(\left[\frac{\sin \pi t}{\pi} \right]_0^1, \left[-\frac{\cos \pi t}{\pi} \right]_0^1 \right).$$

La limite est le vecteur $\left(0, \frac{2}{\pi}\right)$.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 point pour l'écriture intégrale, 1 point pour la majoration ; b) 1 point ; c) 1,5 point : 0,5 point pour la dérivée, 0,5 point pour Cauchy-Schwarz, 0,5 point pour la conclusion ; d) 1 point : 0,5 point pour la justification, 0,5 point pour le calcul.

Exercice 4 : Formules de Taylor et inégalité de Landau (6 points)

a. **Énoncé.** Pour tous $a, b \in I$:

$$f(b) = \sum_{k=0}^p \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t) dt.$$

Démonstration par récurrence sur p . Pour $p = 0$, c'est $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) dt$, vrai pour f de classe $\mathcal{C}^1$. Supposons la formule vraie au rang $p - 1$, et soit f de classe $\mathcal{C}^{p+1}$. On intègre alors par parties le reste, coordonnée par coordonnée, en dérivant $f^{(p)}$ et en primitivant $\frac{(b-t)^{p-1}}{(p-1)!}$ en $-\frac{(b-t)^p}{p!}$:

$$\int_a^b \frac{(b-t)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(t) dt = \frac{(b-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t) dt.$$

On obtient ainsi la formule au rang p .

b. On majore la norme du reste intégral, en distinguant $a \leq b$ ou non grâce à la valeur absolue :

$$\left\| \int_a^b \frac{(b-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t) dt \right\| \leq M_{p+1} \left| \int_a^b \frac{|b-t|^p}{p!} dt \right| = M_{p+1} \frac{|b-a|^{p+1}}{(p+1)!}.$$

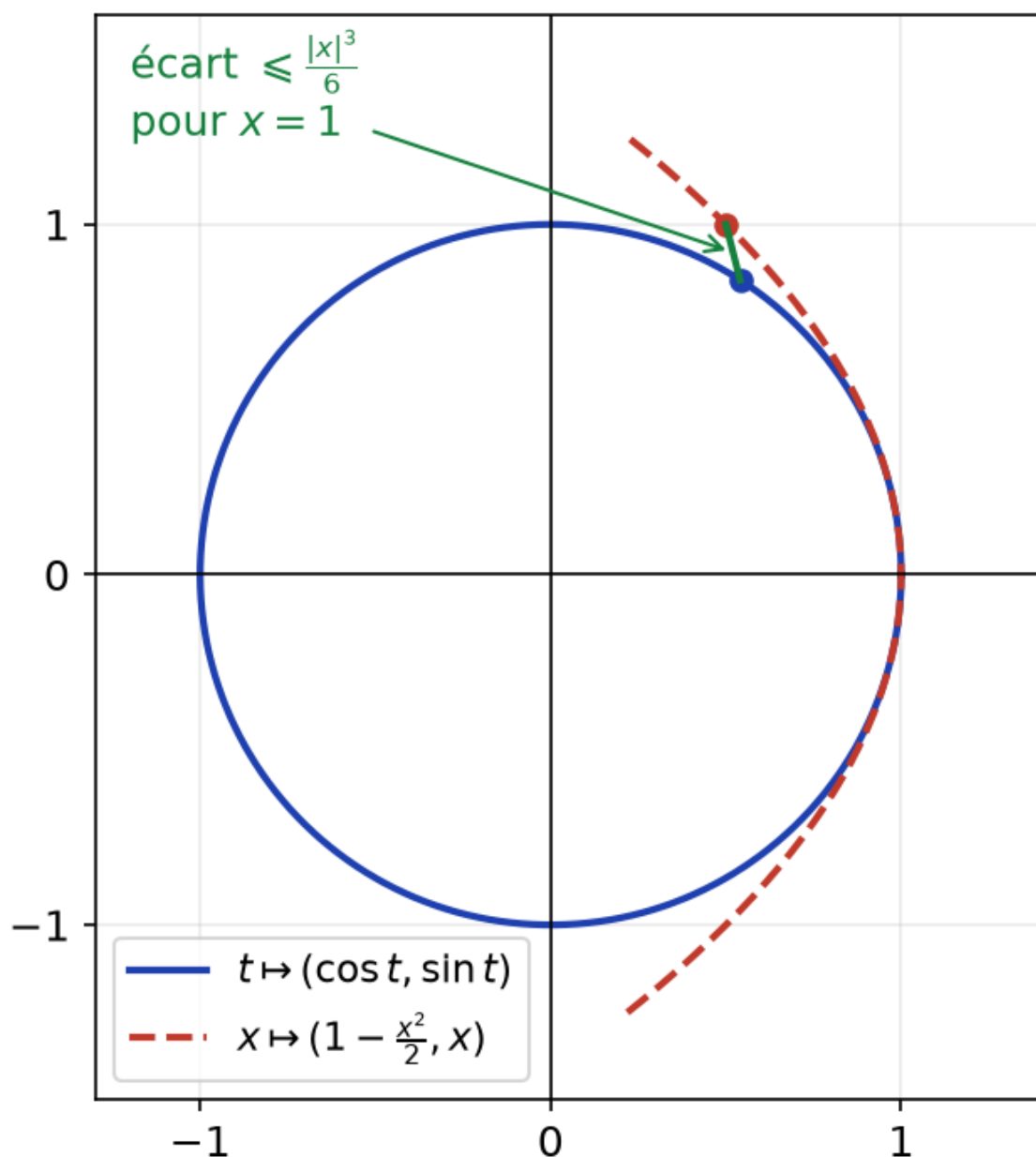
Ainsi, l'écart entre $f(b)$ et son polynôme de Taylor est majoré par $M_{p+1} \frac{|b-a|^{p+1}}{(p+1)!}$.

c. On a $f(0) = (1,0)$, $f'(0) = (0,1)$ et $f''(0) = (-1,0)$. De plus, $f'''(t) = (\sin t, -\cos t)$ est de norme 1, d'où $M_3 = 1$. Par b) :

$$\left\| \left(\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}, \sin x - x \right) \right\| \leq \frac{|x|^3}{6}.$$

Or une coordonnée est majorée en valeur absolue par la norme euclidienne. **Donc**

$$|\sin x - x| \leq \frac{|x|^3}{6} \text{ pour tout réel } x, \text{ et de même } \left| \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{|x|^3}{6}.$$



Pour $x = 1$, l'écart vaut environ $0,164$, juste sous la borne $\frac{1}{6} \approx 0,167$.

d. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. L'inégalité de b), avec $p = 1$ entre x et $x + h$, donne

$$\|f(x+h) - f(x) - h f'(x)\| \leq \frac{h^2 M_2}{2}. \text{ Ensuite, par l'inégalité triangulaire :}$$

$$h |f'(x)| \leq |f(x+h)| + |f(x)| + \frac{h^2 M_2}{2} \leq 2M_0 + \frac{h^2 M_2}{2}.$$

En divisant par h , on obtient $|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{h M_2}{2}$. Le minimum de ce majorant est atteint pour $h = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$ (si $M_0 > 0$). Il vaut alors $\sqrt{M_0 M_2} + \sqrt{M_0 M_2}$. Si $M_0 = 0$, f est nulle et le résultat est immédiat. **Dans tous les cas, $|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$.**

Erreur fréquente : utiliser une égalité de Taylor-Lagrange avec un point intermédiaire c . Pour une fonction vectorielle, seule l'inégalité est valable.

Barème : a) 2 points : 0,5 point pour l'énoncé, 0,5 point pour l'initialisation, 1 point pour l'intégration par parties ; b) 1 point ; c) 1,5 point : 0,5 point pour les dérivées, 0,5 point pour $M_3 = 1$, 0,5 point pour la majoration de $|\sin x - x|$; d) 1,5 point : 1 point pour l'inégalité en h , 0,5 point pour le choix optimal.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : fonctions vectorielles, dérivation et Taylor

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Fonctions vectorielles](#) » en maths spé puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [fonctions vectorielles](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths spé classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).