

Corrigé du contrôle de maths spé : fonctions génératrices et lois de sommes

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : la fonction génératrice caractérise la loi	3 points
Exercice 2 : Fonctions génératrices des lois usuelles	5 points
Exercice 3 : Somme d'un nombre aléatoire de variables	4 points
Exercice 4 : Problème : extinction d'une population de Galton-Watson	8 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : la fonction génératrice caractérise la loi (3 points)

- a. La **fonction génératrice** de X est $G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) t^n$ (théorème de transfert), là où la série converge. Pour $|t| \leq 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) t^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = 1$ converge : la série **converge normalement** sur $[-1, 1]$. En particulier elle converge absolument en $t = 1$, donc son **rayon est au moins** 1. De plus G_X est continue sur $[-1, 1]$ et $G_X(1) = 1$.
- b. Sur $]-1, 1[$, G_X est la somme d'une série entière de rayon au moins 1. Elle y est de classe C^∞ et ses coefficients sont donnés par $P(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$ (unicité des coefficients)

d'une série entière). Si $G_X = G_Y$ sur $[-1, 1]$, leurs dérivées successives en 0 coïncident, donc $P(X = n) = P(Y = n)$ pour tout n : **X et Y ont même loi.**

- c. Si le rayon R est strictement supérieur à 1, G_X est dérivable sur $] -R, R[$ par dérivation terme à terme et $G'_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n P(X = n) t^{n-1}$, la série dérivée ayant le même rayon R . Comme $1 \in] -R, R[$, la série $\sum n P(X = n)$ converge : **X admet une espérance et $E(X) = G'_X(1)$.**

Énoncé général : X admet une espérance si et seulement si G_X est dérivable en 1 (à gauche), et alors $E(X) = G'_X(1)$.

Barème : a) 0,5 point pour la définition, 0,5 point pour la convergence normale ; b) 0,5 point pour la formule des coefficients, 0,5 point pour la conclusion ; c) 0,5 point pour la dérivation terme à terme, 0,5 point pour l'énoncé général.

Exercice 2 : Fonctions génératrices des lois usuelles (5 points)

a.

- $\mathcal{B}(p)$: $G(t) = (1 - p) + p t$, **rayon** $+\infty$.
- $\mathcal{B}(n, p)$: par la formule du binôme,

$$G(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pt)^k (1-p)^{n-k} = (1 - p + pt)^n$$
, polynôme, **rayon** $+\infty$.
- $\mathcal{G}(p)$: $G(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} t^k = pt \sum_{j=0}^{+\infty} ((1-p)t)^j = \frac{pt}{1 - (1-p)t}$ pour $|t| < \frac{1}{1-p}$, **rayon** $\frac{1}{1-p} > 1$.
- $\mathcal{P}(\lambda)$: $G(t) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{\lambda(t-1)}$, **rayon** $+\infty$.

- b. Comme $X^2 = X(X-1) + X$, X admet un moment d'ordre 2 et

$E(X^2) = G_X''(1) + G_X'(1)$. Par la formule de König-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2.$$

Pour $G(p)$, notons $q = 1 - p$. Alors $G'(t) = \frac{p(1-qt) + pqt}{(1-qt)^2} = \frac{p}{(1-qt)^2}$ et

$G''(t) = \frac{2pq}{(1-qt)^3}$, d'où $G'(1) = \frac{1}{p}$ et $G''(1) = \frac{2q}{p^2}$. Ainsi

$$V(X) = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q + p - 1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

$$E(X) = \frac{1}{p} \text{ et } V(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

c. Si X et Y sont indépendantes, t^X et t^Y le sont aussi, donc

$$G_{X+Y}(t) = E(t^X t^Y) = G_X(t) G_Y(t) \text{ sur } [-1, 1].$$

◦ $G_{X+Y}(t) = (1-p+pt)^n (1-p+pt)^m = (1-p+pt)^{n+m}$: c'est la fonction génératrice de $\mathcal{B}(n+m, p)$. Par caractérisation de la loi, $X+Y \sim \mathcal{B}(n+m, p)$.

◦ $G_{X+Y}(t) = e^{\lambda(t-1)} e^{\mu(t-1)} = e^{(\lambda+\mu)(t-1)}$, donc $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

Erreur fréquente : additionner deux binomiales de paramètres p différents et conclure à une binomiale : le produit $(1-p+pt)^n (1-p'+p't)^m$ n'est pas de la forme voulue.

Barème : a) 0,5 point par loi (fonction et rayon) ; b) 0,5 point pour la formule de la variance, 0,5 point pour les dérivées, 0,5 point pour le résultat ; c) 0,5 point pour $G_{X+Y} = G_X G_Y$, 0,5 point par loi.

Exercice 3 : Somme d'un nombre aléatoire de variables (4 points)

a. Par indépendance des X_k , $G_{S_n} = G_{X_1}^n$ sur $[-1, 1]$ (et $G_{S_0} = 1$). La famille

$(N = n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, et N est indépendante de S_n (lemme des coalitions). Pour $k \in \mathbb{N}$:

$$P(S = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n, S_n = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n) P(S_n = k).$$

Soit $t \in [-1, 1]$. La famille $(P(N = n)P(S_n = k)t^k)_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable, car $\sum_n \sum_k P(N = n)P(S_n = k)|t|^k \leq \sum_n P(N = n) = 1$. Par le **théorème de Fubini pour les familles sommables**, on peut intervertir :

$$G_S(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n)P(S_n = k)t^k = \sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n) G_{S_n}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n) G_{X_1}(t)^n.$$

Comme $|G_{X_1}(t)| \leq 1$, cette dernière somme vaut $G_N(G_{X_1}(t))$. **Donc**
 $G_S = G_N \circ G_{X_1}$ sur $[-1, 1]$.

- b. D'après le cours, G_{X_1} est dérivable en 1 avec $G'_{X_1}(1) = E(X_1)$, et G_N est dérivable en 1 avec $G'_N(1) = E(N)$. Comme G_{X_1} envoie $[-1, 1]$ dans $[-1, 1]$ et $G_{X_1}(1) = 1$, la composée $G_N \circ G_{X_1}$ est dérivable en 1 et $G'_S(1) = G'_N(G_{X_1}(1)) G'_{X_1}(1) = E(N) E(X_1)$. Par la caractérisation de l'espérance, **S admet une espérance et $E(S) = E(N) E(X_1)$ (identité de Wald).**

- c. Le nombre de broquets est $S = \sum_{k=1}^N X_k$, où X_k vaut 1 si le k -ième poisson est un broquet : $X_k \sim \mathcal{B}(p)$, indépendantes et indépendantes de N . Par a), pour $t \in [-1, 1]$:

$$G_S(t) = G_N(1 - p + pt) = e^{\lambda(1 - p + pt - 1)} = e^{\lambda p(t - 1)}.$$

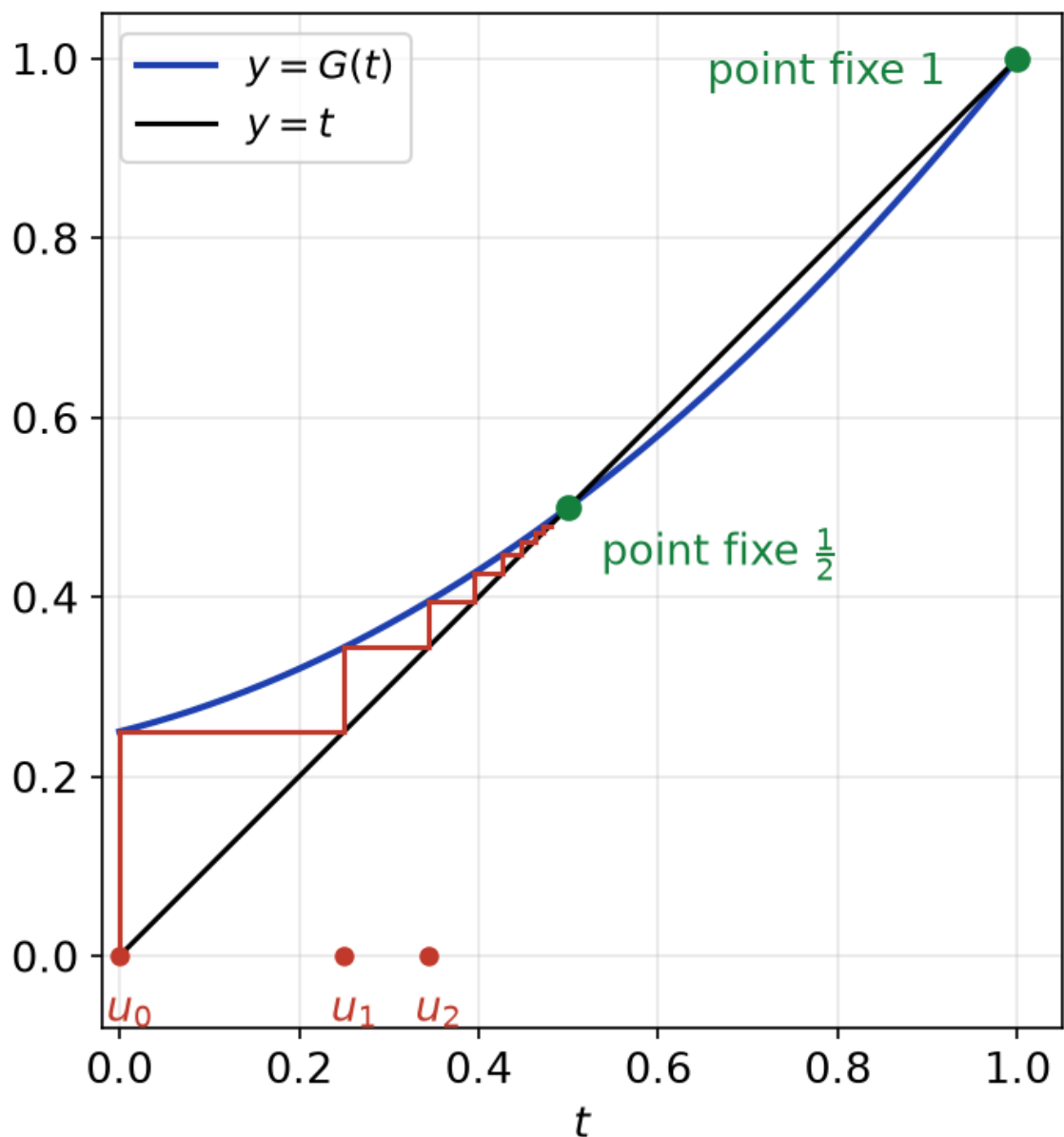
C'est la fonction génératrice de $\mathcal{P}(\lambda p)$: **le nombre de broquets suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda p)$.**

Barème : a) 0,5 point pour la formule des probabilités totales avec indépendance, 0,5 point pour Fubini justifié, 0,5 point pour la conclusion ; b) 0,5 point pour la dérivée de la composée, 0,5 point pour la conclusion ; c) 0,5 point pour la modélisation, 0,5 point pour le calcul, 0,5 point pour la loi.

Exercice 4 : Problème : extinction d'une population de Galton-Watson (8 points)

- a. $G(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}t + \frac{1}{2}t^2$ et $m = G'(1) = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$. L'exercice 3 appliqué avec $N = Z_n$ et $X_k = X_{n,k}$ (hypothèses d'indépendance admises) donne $G_{Z_{n+1}} = G_{Z_n} \circ G$. Comme $G_{Z_0}(t) = t$, une récurrence immédiate donne $G_{Z_n} = G \circ G \circ \dots \circ G$ (n fois), notée $G^{\circ n}$.
- b. Les $G^{\circ n}$ sont des polynômes (ce que confirme $Z_n \leq 2^n$), donc dérivables. En dérivant $G_{Z_{n+1}} = G_{Z_n} \circ G$ en 1, avec $G(1) = 1$:
- $$E(Z_{n+1}) = G'_{Z_n}(1) G'(1) = m E(Z_n). \text{ Comme } E(Z_0) = 1,$$
- $$E(Z_n) = m^n = \left(\frac{5}{4}\right)^n.$$
- c. $G_{Z_n}(0) = \sum_k P(Z_n = k) 0^k = P(Z_n = 0)$ (avec $0^0 = 1$), donc $u_n = G_{Z_n}(0)$. Par associativité de la composition, $G^{\circ(n+1)} = G \circ G^{\circ n}$, donc $u_{n+1} = G(u_n)$, avec $u_0 = P(Z_0 = 0) = 0$. Alors
- $$u_1 = G(0) = \frac{1}{4}, \quad u_2 = G\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{11}{32}.$$
- d. $G(t) = t \Leftrightarrow \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{4}t + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow (2t - 1)(t - 1) = 0$. **Les points fixes de G sur $[0, 1]$ sont $\frac{1}{2}$ et 1 .**

G est croissante sur $[0, 1]$ (coefficients positifs). Majoration : $u_0 = 0 \leq \frac{1}{2}$, et si $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$, alors $0 \leq G(u_n) \leq G\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$. Monotonie : $u_1 = \frac{1}{4} \geq u_0$, et si $u_n \geq u_{n-1}$, alors $u_{n+1} = G(u_n) \geq G(u_{n-1}) = u_n$. La suite (u_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$: elle converge vers $\ell \in [0, \frac{1}{2}]$. Par continuité de G , $G(\ell) = \ell$, et le seul point fixe dans $[0, \frac{1}{2}]$ est $\frac{1}{2}$. $u_n \rightarrow \frac{1}{2}$.



e. Si $Z_n = 0$, alors Z_{n+1} est une somme vide, donc nulle : $(Z_n = 0) \subset (Z_{n+1} = 0)$. La suite d'événements $(Z_n = 0)$ est croissante, de réunion l'extinction. Par **continuité croissante**, $P(\text{extinction}) = \lim u_n$: **la probabilité d'extinction vaut $\frac{1}{2}$** , bien que $E(Z_n) \rightarrow +\infty$.

f. La nouvelle fonction génératrice est $H(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}t^2$, d'où $m = H'(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

Première méthode. $H(t) = t \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow t \in \{1, 2\}$: le seul point fixe dans $[0, 1]$ est 1. Comme en d), la suite $u_{n+1} = H(u_n)$, $u_0 = 0$, est croissante et majorée par 1 (car $H(1) = 1$), donc converge vers un point fixe de $[0, 1]$, c'est-à-dire 1.

Deuxième méthode. Comme en b), $E(Z_n) = \left(\frac{3}{4}\right)^n$. Z_n est positive, donc par l'inégalité de Markov $P(Z_n \geq 1) \leq E(Z_n) = \left(\frac{3}{4}\right)^n \rightarrow 0$, d'où $u_n = 1 - P(Z_n \geq 1) \rightarrow 1$.

Dans les deux cas, par continuité croissante, **l'extinction est presque sûre**.

Erreur fréquente : conclure que l'extinction est presque sûre parce que 1 est point fixe de G . La limite de (u_n) est le *plus petit* point fixe de G dans $[0, 1]$.

Barème : a) 0,5 point pour G et m , 0,5 point pour la composée ; b) 0,5 point pour la dérivation, 0,5 point pour le résultat ; c) 0,5 point pour $u_n = GZ_n(0)$, 0,5 point pour la récurrence, 0,5 point pour u_1 et u_2 ; d) 0,5 point pour les points fixes, 0,5 point pour la majoration, 0,5 point pour la monotonie, 0,5 point pour la limite ; e) 0,5 point pour la suite croissante d'événements, 0,5 point pour la conclusion ; f) 0,5 point pour m , 0,5 point par méthode.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : fonctions génératrices et lois de sommes

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Fonctions génératrices](#) » en maths spé puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [fonctions génératrices](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths spé classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).