

Corrigé du contrôle de maths spé : extremums, hessienne et extremums liés

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours	4 points
Exercice 2 : Points critiques et hessienne	4 points
Exercice 3 : Équation des cordes vibrantes	3 points
Exercice 4 : Extremums liés sur une ellipse	4 points
Exercice 5 : Problème : extremums sur le disque fermé	5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours (4 points)

- a. **Théorème de Schwarz.** Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U , alors pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$ et tout $x \in U$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x).$$

- b. Supposons que f admette un extremum local en a , par exemple un minimum : il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$ et $f(x) \geq f(a)$ pour tout $x \in B(a, r)$. C'est ici qu'intervient l'ouverture de U .

Soit $v \in \mathbb{R}^n$ non nul et $\delta = \frac{r}{|v|}$. La fonction $\varphi : t \rightarrow f(a + tv)$ est définie sur $]-\delta, \delta[$. Par la règle de la chaîne, elle est dérivable en 0 , avec $\varphi'(0) = df(a)(v)$. De plus, $\varphi(t) \geq \varphi(0)$ pour tout t : φ admet un minimum en 0 , point intérieur à l'intervalle. Donc $\varphi'(0) = 0$.

Ainsi $df(a)(v) = 0$ pour tout v (le cas $v = 0$ est immédiat). **Donc $df(a) = 0$: le point a est critique.**

- c. Prenons $n = 1$, la partie $[0, 1]$ et $f(x) = x$. La fonction f atteint son minimum sur $[0, 1]$ en 0 , mais $f'(0) = 1 \neq 0$. **Un extremum atteint au bord d'une partie non ouverte n'est pas forcément un point critique.**

- d. Notons $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$, de sorte que $H_f(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ (symétrique par Schwarz). Soit a un point critique.

Si $\det H_f(a) = rt - s^2 > 0$ et $\text{tr } H_f(a) > 0$, f admet un minimum local strict en a . Si $\det H_f(a) > 0$ et $\text{tr } H_f(a) < 0$, c'est un maximum local strict. Si $\det H_f(a) < 0$, il n'y a pas d'extremum local (point col). Si $\det H_f(a) = 0$, on ne peut pas conclure à l'ordre 2.

Barème : a) 1 point (hypothèse de classe C^2 exigée) ; b) 0,5 point pour l'usage de l'ouvert, 0,5 point pour la dérivée de φ , 0,5 point pour la conclusion ; c) 0,5 point ; d) 1 point (0,25 par cas, 0,25 pour le lien avec les valeurs propres ou le cas nul).

Exercice 2 : Points critiques et hessienne (4 points)

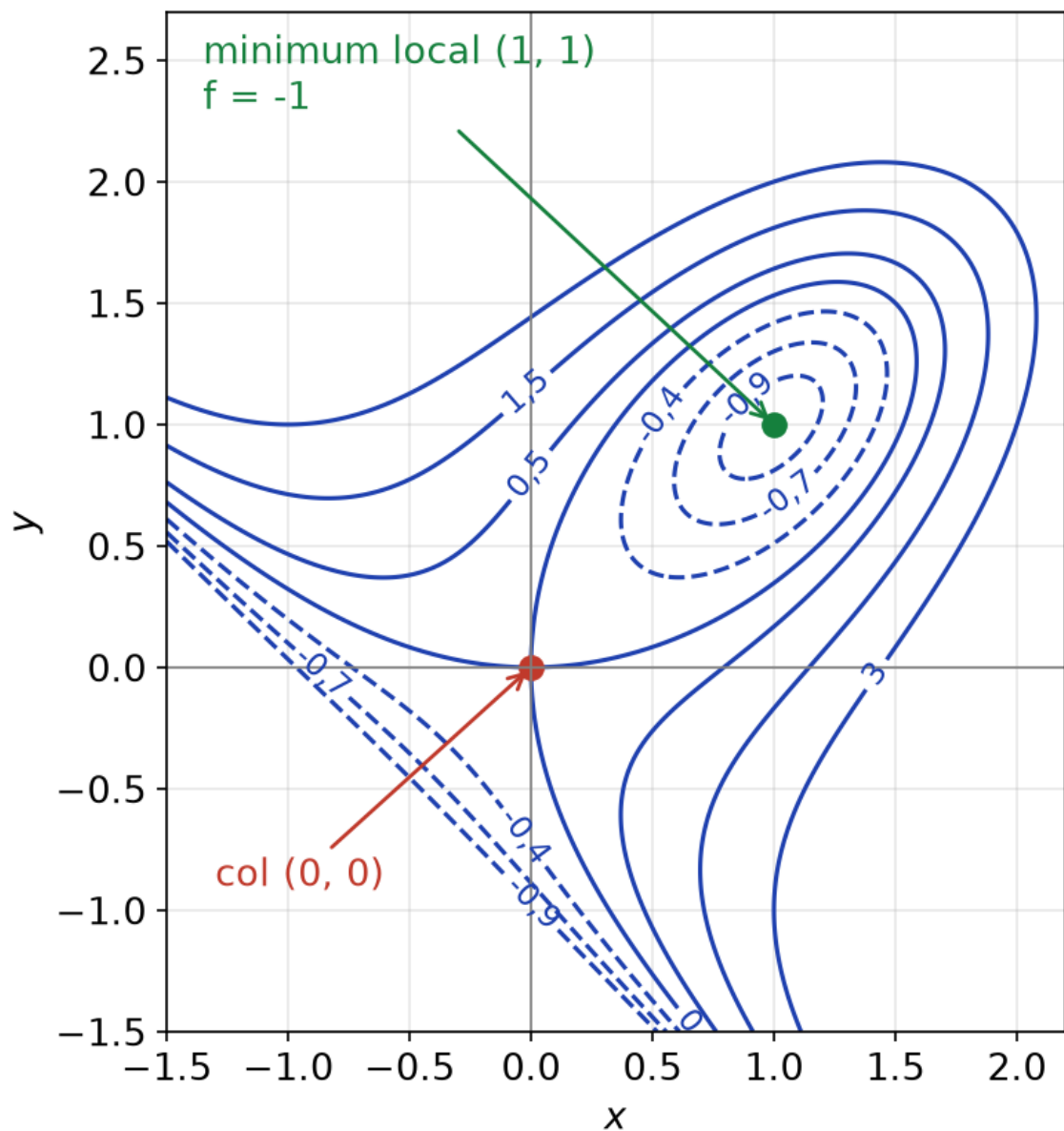
- a. La fonction f est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. On a $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x$. Un point critique vérifie donc $y = x^2$ et $x = y^2$. On en tire $x = x^4$, soit $x(x^3 - 1) = 0$, donc $x = 0$ ou $x = 1$.

Les points critiques sont $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

- b. La matrice hessienne vaut $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$.

En $(0, 0)$: $\det H_f(0, 0) = -9 < 0$. **Le point $(0, 0)$ est un point col : il n'y a pas d'extremum local.** On le confirme directement : $f(x, x) = 2x^3 - 3x^2 < 0$ pour $0 < |x| < \frac{3}{2}$, alors que $f(x, -x) = 3x^2 > 0$ pour $x \neq 0$.

En $(1, 1)$: $H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$, de déterminant $36 - 9 = 27 > 0$ et de trace $12 > 0$. **Le point $(1, 1)$ est un minimum local strict, de valeur $f(1, 1) = 1 + 1 - 3 = -1$.**



- c. On a $f(x, 0) = x^3$, qui tend vers $+\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$ et vers $-\infty$ quand $x \rightarrow -\infty$. **La fonction f n'est ni majorée ni minorée : elle n'a aucun extremum global.** En particulier, le minimum local en $(1, 1)$ n'est pas global.

Barème : a) 0,5 point pour les dérivées partielles, 1 point pour la résolution du système ; b) 0,5 point pour la hessienne, 0,5 point par point critique ; c) 1 point.

Exercice 3 : Équation des cordes vibrantes (3 points)

- a. L'application $(x, y) \rightarrow (x + y, x - y)$ est une bijection linéaire de $\mathbb{R}^2$, de réciproque $(u, v) \rightarrow \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$. Ainsi $g(u, v) = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$: g est de classe $\mathcal{C}^2$, comme composée de f et d'une application linéaire.

Par la règle de la chaîne, avec les dérivées de g prises en $(x + y, x - y)$, on obtient $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial v}$. En dérivant une seconde fois et en utilisant le théorème de Schwarz pour g , on trouve

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}.$$

Par différence, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(x + y, x - y)$.

- b. Comme le changement de variables est bijectif, f est solution de (P) si et seulement si $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$ sur $\mathbb{R}^2$. Posons $h = \frac{\partial g}{\partial u}$, de classe $\mathcal{C}^1$. Par Schwarz, $\frac{\partial h}{\partial v} = 0$ sur $\mathbb{R}^2$. Pour u fixé, $v \rightarrow h(u, v)$ a une dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$: elle est constante. Donc $h(u, v) = \alpha(u)$, avec $\alpha(u) = h(u, 0)$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit φ une primitive de α ; elle est de classe $\mathcal{C}^2$. Alors $\frac{\partial}{\partial u}(g(u, v) - \varphi(u)) = 0$, donc $g(u, v) = \varphi(u) + \psi(v)$, avec $\psi(v) = g(0, v) - \varphi(0)$ de classe $\mathcal{C}^2$.

Réciproquement, si $f(x, y) = \varphi(x + y) + \psi(x - y)$ avec φ, ψ de classe $\mathcal{C}^2$, alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \varphi''(x + y) + \psi''(x - y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Les solutions de (P) sont les fonctions $(x, y) \rightarrow \varphi(x + y) + \psi(x - y)$, avec φ, ψ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

- c. Les conditions donnent $\varphi(x) + \psi(x) = x^2$ et $\varphi'(x) - \psi'(x) = 0$ pour tout x . Donc $\varphi - \psi$ est une constante c , puis $\varphi(x) = \frac{x^2 + c}{2}$ et $\psi(x) = \frac{x^2 - c}{2}$. Par conséquent,

$$f(x, y) = \frac{(x + y)^2 + (x - y)^2}{2} = x^2 + y^2.$$

La solution cherchée est $f(x, y) = x^2 + y^2$; on vérifie que $2 - 2 = 0$.

Barème : a) 0,5 point pour la classe de g , 1 point pour le calcul des dérivées secondes ; b) 0,75 point pour la résolution de $g_{uv} = 0$, 0,25 point pour la réciproque ; c) 0,5 point.

Exercice 4 : Extremums liés sur une ellipse (4 points)

- a. L'ensemble $\Gamma = g^{-1}(\{0\})$ est fermé, comme image réciproque d'un fermé par l'application continue g . Il est borné, car $|x| \leq 2$ et $|y| \leq 1$ sur Γ . Il est non vide, car $(2, 0) \in \Gamma$. En dimension finie, Γ est donc compact. **La fonction continue f est bornée sur Γ et y atteint ses bornes.**
- b. On a $\nabla g(x, y) = \left(\frac{x}{2}, 2y\right)$, nul seulement en $(0, 0)$. Or $g(0, 0) = -1 \neq 0$. **Donc ∇g ne s'annule pas sur Γ .**
- c. On a $\nabla f(x, y) = (y, x)$. Les deux gradients sont colinéaires si et seulement si

$$\det \begin{pmatrix} y & \frac{x}{2} \\ x & 2y \end{pmatrix} = 2y^2 - \frac{x^2}{2} = 0, \text{ soit } x^2 = 4y^2.$$

En reportant dans l'équation de Γ , on obtient $y^2 + y^2 = 1$, soit $y^2 = \frac{1}{2}$, puis $x^2 = 2$.

Les points cherchés sont $\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **et** $\left(-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

- d. Le maximum et le minimum de f sur Γ sont en particulier des extremums locaux de la restriction. D'après b et le théorème des extremums liés, ils sont atteints parmi les quatre points précédents. Or f vaut $\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$ aux deux premiers et -1 aux deux derniers.

Le maximum de f sur Γ vaut 1, atteint en $\pm\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; le minimum vaut -1 , atteint en $\pm\left(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Erreur fréquente : oublier la question a. Sans l'existence des extremums, la condition de colinéarité fournit seulement des candidats.

Barème : a) 1 point (fermé, borné, dimension finie) ; b) 0,5 point ; c) 0,75 point pour la condition, 0,75 point pour les quatre points ; d) 1 point.

Exercice 5 : Problème : extremums sur le disque fermé (5 points)

- a. Le disque D est fermé et borné dans $\mathbb{R}^2$, donc compact. La fonction f , polynomiale, est continue. **Elle admet donc un maximum et un minimum sur D .**

b. L'intérieur de D est le disque ouvert, sur lequel on cherche les points critiques :

$\nabla f(x, y) = (2x - 1, 4y) = (0, 0)$ donne $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, qui est bien intérieur. En ce point,

$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, de déterminant $8 > 0$ et de trace $6 > 0$. **C'est un minimum**

local strict, de valeur $f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}$. En fait, $f(x, y) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2y^2 - \frac{1}{4}$, ce qui montre que le minimum est global.

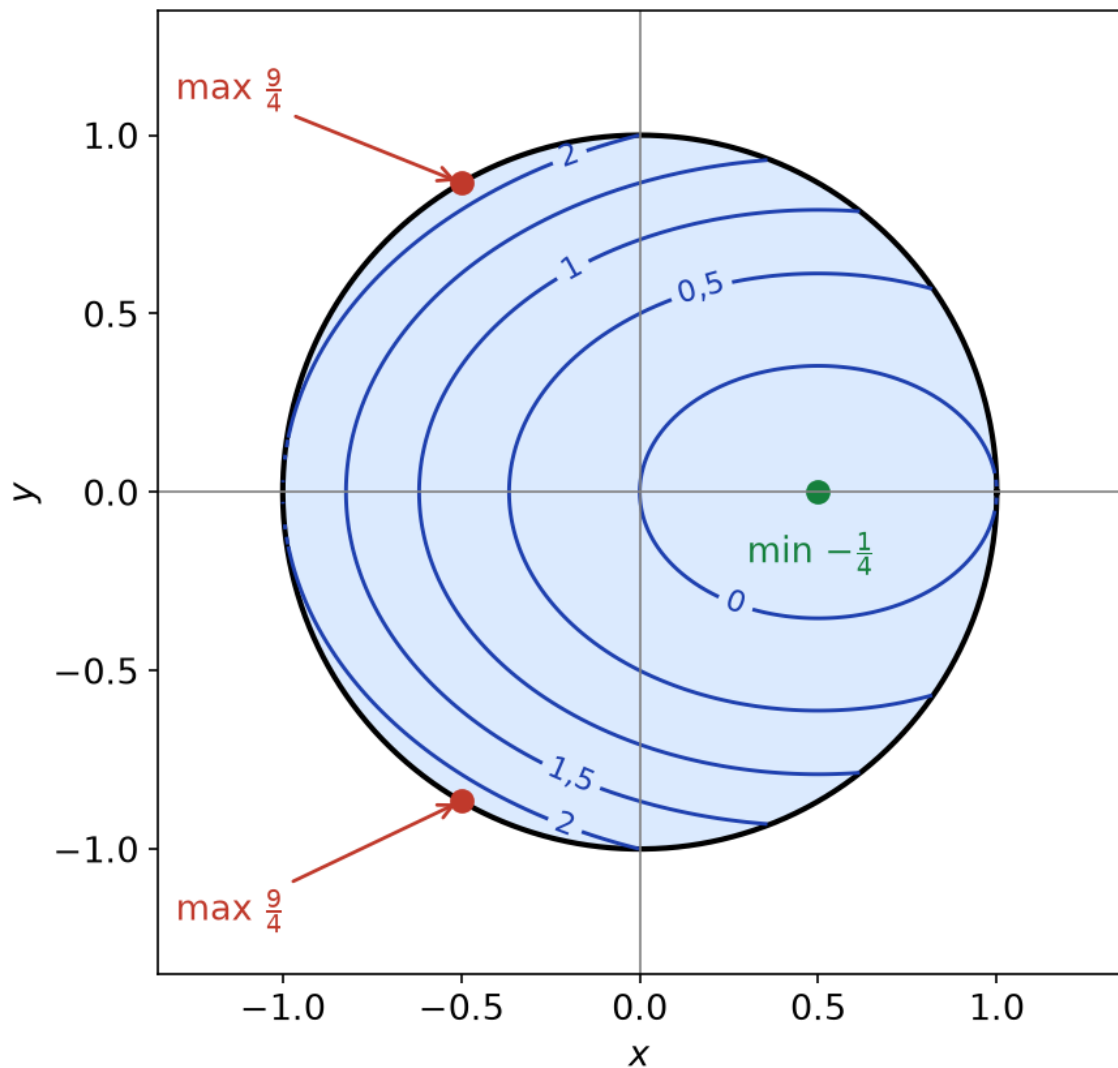
c. Pour $t \in [0, 2\pi]$, on a

$f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + 2\sin^2 t - \cos t = 2 - \cos^2 t - \cos t$. Posons $u = \cos t$, qui décrit $[-1, 1]$, et $k(u) = 2 - u - u^2$. Alors $k'(u) = -1 - 2u$: k est croissante sur $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$ puis décroissante sur $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$.

On calcule $k(-1) = 2$, $k\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$ et $k(1) = 0$. **Sur le cercle, f prend ses valeurs dans $\left[0, \frac{9}{4}\right]$: le maximum $\frac{9}{4}$ est atteint en $\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et le minimum 0 en $(1, 0)$.**

d. Un extremum de f sur D est atteint soit à l'intérieur, où c'est alors un extremum local sur un ouvert, donc un point critique (exercice 1), soit sur le bord. Le seul point critique intérieur donne $-\frac{1}{4}$; sur le bord, les valeurs sont comprises entre 0 et $\frac{9}{4}$.

Le minimum de f sur D vaut $-\frac{1}{4}$, atteint en $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$; le maximum vaut $\frac{9}{4}$, atteint en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et en $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Vérification : $\frac{1}{4} + 2 \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$.



- e. Au point $a = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, on a $\nabla f(a) = (2x - 1, 4y) = (-2, 2\sqrt{3})$. Le gradient de $N : (x, y) \rightarrow x^2 + y^2$ vaut $\nabla N(a) = (2x, 2y) = (-1, \sqrt{3})$. Ainsi $\nabla f(a) = 2 \nabla N(a)$: les deux gradients sont colinéaires.

C'est la condition des extremums liés : a est un maximum de f restreinte au cercle $N = 1$, et $\nabla N(a) \neq 0$. De plus, le coefficient 2 est positif : $\nabla f(a)$ pointe vers l'extérieur du disque. La fonction f ne peut donc pas croître en entrant dans D , ce qui est cohérent avec un maximum sur D .

Barème : a) 0,5 point ; b) 0,5 point pour le point critique, 0,5 point pour sa nature ; c) 0,5 point pour la

réduction à k , 1 point pour l'étude et les valeurs ; d) 1 point ; e) 0,5 point pour le calcul, 0,5 point pour l'interprétation.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : extremums, hessienne et extremums liés

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours [« Optimisation » en maths spé](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [optimisation](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths spé classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).