

Corrigé du contrôle de maths spé : exponentielle de matrice, systèmes linéaires

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : dérivation et exponentielle d'une somme	3 points
Exercice 2 : Calculs d'exponentielles	5 points
Exercice 3 : Spectre et déterminant de $\exp(A)$	4 points
Exercice 4 : Problème : un système différentiel en dimension 3	8 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : dérivation et exponentielle d'une somme (3 points)

a. On pose $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$. Comme la norme est une norme d'algèbre, on a $|A^k| \leq |A|^k$, donc $\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \frac{|A|^k}{k!}$. Or la série numérique $\sum \frac{|A|^k}{k!}$ converge, de somme $e^{|A|}$. **La série est donc absolument convergente dans l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, qui est de dimension finie, donc complet : elle converge.**

b. Posons $u_k(t) = \frac{t^k}{k!} A^k$. Chaque u_k est de classe $\mathcal{C}^1$, avec $u'_k(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^k$ pour

$k \geq 1$. La série $\sum u_k(t)$ converge pour tout t (question a). Soit $a > 0$. Pour $|t| \leq a$, on a $|u'_k(t)| \leq |A| \frac{(a|A|)^{k-1}}{(k-1)!}$, terme général d'une série convergente. La série des dérivées converge donc normalement sur $[-a, a]$.

Par le théorème de dérivation terme à terme, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a, a]$, pour tout a , donc sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\varphi'(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^k = A \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{t^j A^j}{j!} = A \exp(tA).$$

En factorisant A à droite, on obtient de même $\exp(tA) A$. Ainsi $\varphi'(t) = A \exp(tA) = \exp(tA) A$.

- c. Posons $F(t) = \exp(t(A+B))$ et $G(t) = \exp(tA) \exp(tB)$. D'après b, on a $F'(t) = (A+B) F(t)$. Par dérivation d'un produit (application bilinéaire), $G'(t) = A \exp(tA) \exp(tB) + \exp(tA) B \exp(tB)$. Comme B commute avec $\exp(tA)$, il vient $G'(t) = (A+B) G(t)$.

Ainsi F et G sont solutions du même système linéaire matriciel $Y' = (A+B) Y$, avec $F(0) = G(0) = I_n$. Par le théorème de Cauchy linéaire, $F = G$. En $t = 1$, on obtient $\exp(A+B) = \exp(A) \exp(B)$.

Enfin, A et $-A$ commutent, donc $\exp(A) \exp(-A) = \exp(0) = I_n$. La matrice $\exp(A)$ est inversible, d'inverse $\exp(-A)$.

Barème : a) 0,5 point pour la définition, 0,5 point pour la convergence absolue et la complétude ; b) 0,5 point pour les hypothèses du théorème de dérivation terme à terme, 0,5 point pour le calcul ; c) 0,75 point pour l'argument de Cauchy, 0,25 point pour l'inversibilité.

Exercice 2 : Calculs d'exponentielles (5 points)

- a. Le polynôme caractéristique vaut $(1 - \lambda)^2 - 4 = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$. On a $A_1(1, 1) = 3(1, 1)$ et $A_1(1, -1) = -(1, -1)$. Ainsi $A_1 = P \operatorname{diag}(3, -1) P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Par continuité de $M \rightarrow P M P^{-1}$, on a $\exp(P D P^{-1}) = P \exp(D) P^{-1}$. Donc

$$\exp(A_1) = P \begin{pmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^3 + e^{-1} & e^3 - e^{-1} \\ e^3 - e^{-1} & e^3 + e^{-1} \end{pmatrix}.$$

- b. On trouve $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$. La série est donc finie :

$$\exp(N) = I_3 + N + \frac{N^2}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- c. On a $B = 2I_3 + J$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ensuite, J^2 a pour seul coefficient non nul un 1 en position $(1, 3)$, et $J^3 = 0$. Les matrices $2tI_3$ et tJ commutent, donc, d'après l'exercice 1, $\exp(tB) = \exp(2tI_3) \exp(tJ) = e^{2t} \left(I_3 + tJ + \frac{t^2}{2} J^2 \right)$.

$$\exp(tB) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d. On a $C^2 = D^2 = 0$, donc $\exp(C) = I_2 + C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\exp(D) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Par ailleurs, $(C + D)^2 = I_2$. En séparant les puissances paires et impaires, on obtient $\exp(C + D) = \cosh(1) I_2 + \sinh(1) (C + D)$.

$$\exp(C + D) = \begin{pmatrix} \cosh 1 & \sinh 1 \\ \sinh 1 & \cosh 1 \end{pmatrix}, \quad \exp(C) \exp(D) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les coefficients diagonaux de $\exp(C + D)$ sont égaux, ceux de $\exp(C) \exp(D)$ ne le sont pas. **Donc $\exp(C + D) \neq \exp(C) \exp(D)$: l'hypothèse de commutation est indispensable**, et ici $CD \neq DC$.

Erreur fréquente : écrire $\exp(2I_3 + J) = \exp(2I_3) \exp(J)$ sans mentionner que $2I_3$ et J commutent ; la question d montre que cette justification n'est pas une formalité.

Barème : a) 0,5 point pour la diagonalisation, 1 point pour $\exp(A_1)$; b) 0,5 point pour les puissances, 0,5 point pour $\exp(N)$; c) 0,5 point pour la commutation citée, 1 point pour le résultat ; d) 0,5 point pour les trois exponentielles, 0,5 point pour la conclusion.

Exercice 3 : Spectre et déterminant de $\exp(A)$ (4 points)

- a. Pour tout k , on a $A^k = P T^k P^{-1}$. Donc la somme partielle $S_m(A) = \sum_{k=0}^m \frac{A^k}{k!}$ vaut $P S_m(T) P^{-1}$. L'application $M \rightarrow P M P^{-1}$ est linéaire en dimension finie, donc continue. En passant à la limite, $\exp(A) = P \exp(T) P^{-1}$.

Un produit de matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieur, et ses coefficients diagonaux sont les produits des coefficients diagonaux. Ainsi T^k est triangulaire supérieure, de diagonale $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$. Il en va de même pour $S_m(T)$, de diagonale $\sum_{k=0}^m \frac{\lambda_i^k}{k!}$. Or

l'ensemble des matrices triangulaires supérieures est un sous-espace vectoriel, donc fermé en dimension finie. Par passage à la limite, $\exp(T)$ est triangulaire supérieure, de coefficients diagonaux $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$.

- b. Les matrices $\exp(A)$ et $\exp(T)$ sont semblables. Elles ont donc même spectre et même déterminant. Le spectre d'une matrice triangulaire est l'ensemble de ses coefficients diagonaux. **Donc** $\text{Sp}(\exp A) = \{e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}\} = \{e^\lambda, \lambda \in \text{Sp}(A)\}$.

De plus, $\det(\exp A) = \prod e^{\lambda_i} = e^{\sum \lambda_i}$. Or $\sum \lambda_i = \text{tr}(T) = \text{tr}(A)$, car la trace est invariante par similitude. **Ainsi** $\det(\exp A) = e^{\text{tr} A}$.

- c. Si A est réelle, $\text{tr}(A)$ est réel, donc $\det(\exp A) = e^{\text{tr} A} > 0$. **Par exemple**, $\text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$, de déterminant -1 , est inversible mais n'est l'exponentielle d'aucune matrice réelle.

- d. La transposition est linéaire, donc continue, et $(A^k)^t = (A^t)^k$. Ainsi $(\exp A)^t = \exp(A^t)$. D'après l'exercice 1, $\exp(-A) = \exp(A)^{-1}$. Donc $(\exp A)^t \exp(A) = I_n$: la matrice $\exp(A)$ est orthogonale.

Enfin, la diagonale d'une matrice antisymétrique est nulle, donc $\text{tr}(A) = 0$ et $\det(\exp A) = e^0 = 1$. **Ainsi** $\exp(A) \in SO_n(\mathbb{R})$.

Barème : a) 0,5 point pour la similitude, 1 point pour la forme triangulaire (fermeture justifiée) ; b) 0,5 point pour le spectre, 0,5 point pour le déterminant ; c) 0,5 point ; d) 0,5 point pour l'orthogonalité, 0,5 point pour le déterminant.

Exercice 4 : Problème : un système différentiel en dimension 3 **(8 points)**

- a. Chaque coefficient de U^2 vaut $1 + 1 + 1 = 3$, donc $U^2 = 3U$. Comme U et I_3 commutent, $A^2 = U^2 - 2U + I_3 = 3U - 2U + I_3 = U + I_3$. Or $U + I_3 = A + 2I_3$, donc $A^2 = A + 2I_3$.
- b. Le polynôme $X^2 - X - 2 = (X - 2)(X + 1)$ annule A . Il est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable, et $\text{Sp}(A) \subset \{2, -1\}$.

D'une part, $Au = 2u$, donc 2 est valeur propre. D'autre part, $\ker(A + I_3) = \ker U$ est le plan d'équation $x + y + z = 0$. Il est non nul, donc -1 est valeur propre. Les dimensions des sous-espaces propres ont pour somme 3. Ainsi $E_2(A) = \text{Vect}(u)$ et $E_{-1}(A)$ est le plan d'équation $x + y + z = 0$.

- c. Les matrices $-tI_3$ et tU commutent. D'après l'exercice 1, $\exp(tA) = \exp(-tI_3) \exp(tU) = e^{-t} \exp(tU)$. Par récurrence, $U^k = 3^{k-1}U$ pour $k \geq 1$. Donc

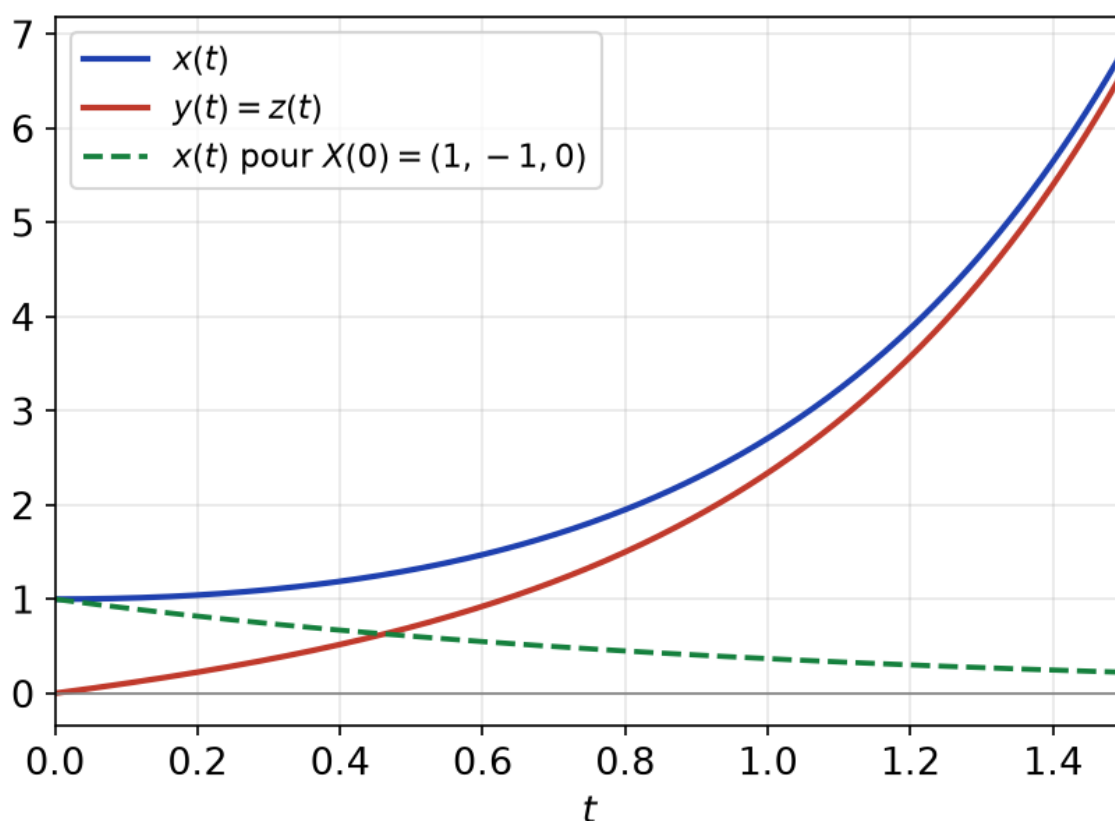
$$\exp(tU) = I_3 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k 3^{k-1}}{k!} U = I_3 + \frac{e^{3t} - 1}{3} U.$$

On obtient $\exp(tA) = e^{-t} I_3 + \frac{e^{2t} - e^{-t}}{3} U$. Vérification : en $t = 0$, on retrouve I_3 .

d. Le système est à coefficients constants. D'après le cours, l'unique solution du problème de Cauchy est $X(t) = \exp(tA) X(0)$. Or $U(1, 0, 0) = u$, donc

$$X(t) = e^{-t} (1, 0, 0) + \frac{e^{2t} - e^{-t}}{3} (1, 1, 1).$$

La solution est $x(t) = \frac{e^{2t} + 2e^{-t}}{3}$ **et** $y(t) = z(t) = \frac{e^{2t} - e^{-t}}{3}$. Vérification :
 $x(0) = 1$, $y(0) = z(0) = 0$, et $y'(t) = \frac{2e^{2t} + e^{-t}}{3} = x(t) + z(t)$.



e. Posons $s = a + b + c$. On a $U(a, b, c) = s u$, donc

$$X(t) = e^{-t} (a, b, c) + s \frac{e^{2t} - e^{-t}}{3} u.$$

Si $s = 0$, alors $X(t) = e^{-t} (a, b, c)$, qui tend vers 0 . Si $s \neq 0$, la première coordonnée vaut $e^{-t} a + s \frac{e^{2t} - e^{-t}}{3}$, qui tend vers $\pm \infty$. **La solution tend vers 0 si et seulement si $a + b + c = 0$.** Géométriquement, **les conditions initiales convenables forment le plan $E_{-1}(A)$** , associé à la valeur propre de partie réelle négative.

f. On cherche une solution constante X_c , c'est-à-dire telle que $A X_c = -u$. Comme $A u = 2u$, on peut prendre $X_c = -\frac{1}{2}u$. Alors $Y = X - X_c$ vérifie $Y' = AY$ et $Y(0) = \frac{1}{2}u$. Donc $Y(t) = \exp(tA) \frac{u}{2} = \frac{e^{2t}}{2}u$, puisque u est vecteur propre pour la valeur propre 2.

La solution est $X(t) = \frac{e^{2t}-1}{2} (1, 1, 1)$. Vérification : $X'(t) = e^{2t}u$ et $AX + u = (e^{2t}-1)u + u = e^{2t}u$.

Barème : a) 1 point ; b) 0,5 point pour la diagonalisabilité, 1 point pour les sous-espaces propres ; c) 0,5 point pour la commutation, 1 point pour les puissances de U, 0,5 point pour le résultat ; d) 0,5 point pour la formule $X(t) = \exp(tA)X(0)$, 1 point pour les coordonnées ; e) 0,5 point pour la condition, 0,5 point pour l'interprétation ; f) 0,5 point pour la solution constante, 0,5 point pour la solution.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : exponentielle de matrice, systèmes linéaires

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Systèmes différentiels linéaires](#) » en [maths spé](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [systèmes différentiels linéaires](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths spé classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).