

Corrigé du contrôle de maths spé : espérance, variance, loi des grands nombres

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev	4 points
Exercice 2 : Espérance et variance des lois géométrique et de Poisson	4 points
Exercice 3 : L'espérance par les probabilités de queue	4 points
Exercice 4 : Problème : covariance, points fixes et sondage	8 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev (4 points)

- a. **Inégalité de Markov** : si X est une variable aléatoire positive admettant une espérance, alors pour tout $a > 0$, $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$.

Démonstration. Notons 1_A l'indicatrice de $A = (X \geq a)$. Sur A , $a 1_A = a \leq X$; hors de A , $a 1_A = 0 \leq X$ car $X \geq 0$. Donc $a 1_A \leq X$. Par croissance et linéarité de l'espérance, $a E(1_A) = a P(A) \leq E(X)$, d'où le résultat en divisant par $a > 0$.

- b. **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev** : si X admet un moment d'ordre 2, alors pour tout $\epsilon > 0$, $P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(X)}{\epsilon^2}$.

Démonstration. La variable $Z = (X - E(X))^2$ est positive et admet une espérance, égale à $V(X)$. Comme $|X - E(X)| \geq \varepsilon$ équivaut à $Z \geq \varepsilon^2$, l'inégalité de Markov appliquée à Z avec $a = \varepsilon^2 > 0$ donne $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) = P(Z \geq \varepsilon^2) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$.

- c. **Loi faible des grands nombres :** soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes, de même loi, admettant un moment d'ordre 2, d'espérance m . On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Barème : a) 0,5 point pour l'énoncé avec hypothèses, 1 point pour la démonstration ; b) 0,5 point pour l'énoncé, 1 point pour la démonstration ; c) 0,5 point pour les hypothèses, 0,5 point pour la conclusion.

Exercice 2 : Espérance et variance des lois géométrique et de Poisson (4 points)

- a. La série entière $\sum_{k \geq 0} x^k$ a pour rayon 1 et pour somme $\frac{1}{1-x}$ sur $] -1, 1[$. Par dérivation terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Avec $x = 1 - p \in]0, 1[$, la série $\sum k p(1-p)^{k-1}$ converge (à termes positifs), donc X admet une espérance et

$$E(X) = p \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

De même, par le théorème de transfert,

$$E(X(X-1)) = p(1-p) \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} = \frac{2p(1-p)}{p^3} = \frac{2(1-p)}{p^2}. \text{ Comme } X^2 = X(X-1) + X, \text{ } X \text{ admet un moment d'ordre 2 et}$$

$$V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2-2p+p-1}{p^2}.$$

$$E(X) = \frac{1}{p} \text{ et } V(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

b. Les séries suivantes, à termes positifs, convergent :

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda, \quad E(Y(Y-1)) = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda^2.$$

$$\text{Donc } V(Y) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 : E(Y) = V(Y) = \lambda.$$

c. La variable $\frac{1}{1+Y}$ est bornée (à valeurs dans $]0, 1]$), donc elle admet une espérance. Par le théorème de transfert :

$$E\left(\frac{1}{1+Y}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} (e^{\lambda} - 1).$$

$$E\left(\frac{1}{1+Y}\right) = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

Erreur fréquente : écrire $E\left(\frac{1}{1+Y}\right) = \frac{1}{1+E(Y)}$: l'espérance n'est linéaire que pour les combinaisons linéaires, pas pour une fonction quelconque.

Barème : a) 0,5 point pour la dérivation de la série entière, 0,5 point pour $E(X)$, 0,5 point pour $E(X(X-1))$, 0,5 point pour $V(X)$; b) 0,5 point pour $E(Y)$, 0,5 point pour $V(Y)$; c) 0,5 point pour l'existence, 0,5 point pour le calcul.

Exercice 3 : L'espérance par les probabilités de queue (4 points)

a. Pour $n \geq 1$, $P(X \geq n) = \sum_{k=n}^{+\infty} P(X = k)$. Considérons la famille de réels positifs

$(u_{n,k})_{(n,k)} \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $u_{n,k} = P(X = k)$ si $n \leq k$ et 0 sinon. Par le **théorème**

de Fubini pour les familles positives (somme par paquets dans $[0, +\infty]$), on peut intervertir les sommations :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^k P(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k P(X = k).$$

Le dernier membre vaut $E(X)$ dans $[0, +\infty]$ (le terme $k = 0$ est nul). Donc

$$E(X) = \sum_{n \geq 1} P(X \geq n), \text{ et } X \text{ admet une espérance si et seulement si cette série à}$$

termes positifs converge.

b. Notons D_1 et D_2 les deux résultats, indépendants et uniformes sur $\{1, \dots, 6\}$. Pour

$k \in \{1, \dots, 6\}$, $(M \leq k) = (D_1 \leq k) \cap (D_2 \leq k)$, donc par indépendance

$$P(M \leq k) = \frac{k^2}{36}. \text{ Pour } 1 \leq n \leq 6,$$

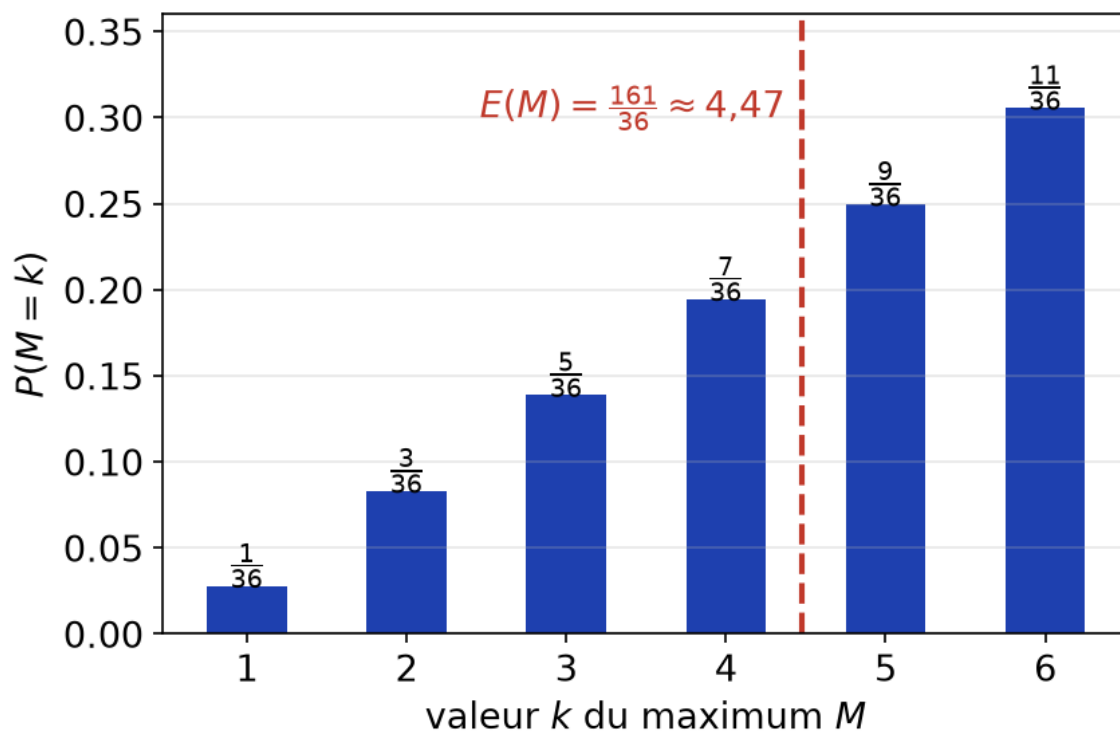
$$P(M \geq n) = 1 - P(M \leq n-1) = 1 - \frac{(n-1)^2}{36}, \text{ et } P(M \geq n) = 0 \text{ pour } n \geq 7.$$

Par a) :

$$E(M) = \sum_{n=1}^6 \left(1 - \frac{(n-1)^2}{36}\right) = 6 - \frac{0+1+4+9+16+25}{36} = 6 - \frac{55}{36} = \frac{161}{36}.$$

$$E(M) = \frac{161}{36} \approx 4,47. \text{ Vérification directe : } P(M = k) = \frac{k^2 - (k-1)^2}{36} = \frac{2k-1}{36} \text{ et}$$

$$\sum_{k=1}^6 k \frac{2k-1}{36} = \frac{2 \times 91 - 21}{36} = \frac{161}{36}.$$



- c. Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, $P(X \geq n) = P(X > n-1) = (1-p)^{n-1}$ pour $n \geq 1$. Donc
- $$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{n-1} = \frac{1}{1-(1-p)}, \text{ soit } E(X) = \frac{1}{p}, \text{ en accord avec l'exercice 2.}$$

Barème : a) 0,5 point pour l'écriture en somme double, 0,5 point pour le théorème d'interversion cité, 0,5 point pour la conclusion ; b) 0,5 point pour $P(M \leq k)$, 0,5 point pour $P(M \geq n)$, 0,5 point pour $E(M)$; c) 0,5 point pour $P(X \geq n)$, 0,5 point pour la somme.

Exercice 4 : Problème : covariance, points fixes et sondage (8 points)

Partie A.

- a. Les permutations qui fixent i sont en bijection avec les permutations des $n-1$ autres éléments : il y en a $(n-1)!$. Par équiprobabilité, $P(X_i = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$. X_i suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\frac{1}{n}\right)$ et $E(X_i) = \frac{1}{n}$.

- b. Pour $i \neq j$, $X_i X_j$ vaut 1 si et seulement si σ fixe i et j , ce qui laisse $(n-2)!$ permutations. Donc $E(X_i X_j) = P(X_i X_j = 1) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$ et

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{n - (n-1)}{n^2(n-1)} = \frac{1}{n^2(n-1)}.$$

$\text{Cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{n^2(n-1)} \neq 0$, donc X_i et X_j ne sont pas indépendantes (des variables indépendantes ont une covariance nulle).

- c. Par linéarité, $E(S) = n \times \frac{1}{n} = 1$. La variance d'une somme s'écrit

$$V(S) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(X_i, X_j), \text{ avec } V(X_i) = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{ et}$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \text{ couples } i < j :$$

$$V(S) = 1 - \frac{1}{n} + 2 \times \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{1}{n^2(n-1)} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = 1.$$

$$E(S) = V(S) = 1, \text{ quel que soit } n \geq 2.$$

Partie B.

d. Par linéarité, $E(F_n) = \frac{np}{n} = p$. Les Y_i étant indépendantes, la variance de leur somme est la somme des variances : $V(F_n) = \frac{1}{n^2} \times n p(1-p)$. $E(F_n) = p$ et $V(F_n) = \frac{p(1-p)}{n}$.

e. $\frac{1}{4} - p(1-p) = p^2 - p + \frac{1}{4} = \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, donc $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à F_n donne, pour $\varepsilon > 0$:

$$P(|F_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(F_n)}{\varepsilon^2} = \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

Quand $n \rightarrow +\infty$, le majorant tend vers 0 : on retrouve la **loi faible des grands nombres**, la fréquence observée converge en probabilité vers p . L'intérêt de la majoration est qu'elle ne dépend pas de p , inconnu.

f. Il suffit que $\frac{1}{4n \times 0,02^2} \leq 0,05$, soit $n \geq \frac{1}{4 \times 0,0004 \times 0,05} = \frac{1}{0,00008} = 12\,500$. **Le plus petit entier convenable est $n = 12\,500$** . Avec une précision de 0,04, on obtient $n \geq \frac{1}{4 \times 0,0016 \times 0,05} = 3\,125$: doubler la tolérance divise par 4 la taille de l'échantillon, car ε intervient au carré. Cette borne est pessimiste : Bienaymé-Tchebychev est une inégalité grossière.

Erreur fréquente : écrire $V(S) = \sum V(X_i)$ dans la partie A. Cette formule suppose des variables deux à deux non corrélées, ce qui est faux ici.

Barème : a) 0,5 point pour le dénombrement, 0,5 point pour la loi et l'espérance ; b) 0,5 point pour $E(X_i X_j)$, 0,5 point pour la covariance, 0,5 point pour la non-indépendance ; c) 0,5 point pour $E(S)$, 0,5 point pour la formule de la variance d'une somme, 0,5 point pour $V(S) = 1$; d) 0,5 point par résultat ; e) 0,5 point pour $p(1-p) \leq 1/4$, 0,5 point pour Bienaymé-Tchebychev, 0,5 point pour la loi faible ; f) 1 point pour $n = 12\,500$, 0,5 point pour 3 125.

Après le corrigé du contrôle : espérance, variance, loi des grands nombres

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Espérance et variance](#) » en maths spé puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [espérance et variance](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths spé classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).