

Corrigé du contrôle de maths spé : espaces probabilisés et variables discrètes

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : dénombrabilité et continuité monotone	3 points
Exercice 2 : Pile ou face infini	4 points
Exercice 3 : Loi géométrique, absence de mémoire et minimum	5 points
Exercice 4 : Problème : lois de Poisson et clients d'un magasin	8 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : dénombrabilité et continuité monotone (3 points)

a. Un ensemble E est **dénombrable** s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Surjectivité. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Notons p le plus grand entier tel que 2^p divise m (il existe car $2^p \leq m$ borne p). Alors $\frac{m}{2^p}$ est un entier impair, de la forme $2q + 1$ avec $q \in \mathbb{N}$, et $m = \varphi(p, q)$.

Injectivité. Si $2^p(2q + 1) = 2^{p'}(2q' + 1)$ avec, par exemple, $p \leq p'$, alors $2q + 1 = 2^{p' - p}(2q' + 1)$. Le membre de gauche est impair, donc $p' = p$, puis

$$q = q'.$$

Ainsi φ est bijective et $(p, q) \rightarrow \varphi(p, q) - 1$ est une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$: $\mathbb{N}^2$ **est dénombrable**.

b. $\mathbb{Z}$ est dénombrable (par exemple $n \rightarrow 2n$ pour $n \geq 0$ et $n \rightarrow -2n - 1$ pour $n < 0$ est une bijection de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{N}$) et $\mathbb{N}^*$ aussi, donc $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable. L'application $(a, b) \rightarrow \frac{a}{b}$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{Q}$ est surjective, donc $\mathbb{Q}$ est fini ou dénombrable. Comme $\mathbb{Q}$ contient $\mathbb{N}$, il est infini : $\mathbb{Q}$ **est dénombrable**.

c. **Théorème de continuité croissante** : si (A_n) est une suite croissante d'événements, alors

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n).$$

Démonstration. Posons $B_0 = A_0$ et $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ pour $n \geq 1$. Ce sont des événements deux à deux incompatibles : si $k < n$, $B_k \subset A_k \subset A_{n-1}$ et

$$B_n \cap A_{n-1} = \emptyset. \text{ Par récurrence, } \bigcup_{k=0}^n B_k = A_n \text{ (la suite est croissante), donc}$$

$$\bigcup_n B_n = \bigcup_n A_n. \text{ Par } \sigma\text{-additivité :}$$

$$P\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(B_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n P(B_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n),$$

la dernière égalité venant de l'additivité finie appliquée à $A_n = B_0 \cup \dots \cup B_n$.

Barème : a) 0,5 point pour la bijectivité de φ , 0,5 point pour la définition et la conclusion ; b) 0,5 point ; c) 0,5 point pour l'énoncé, 0,5 point pour la construction des B_n , 0,5 point pour la σ -additivité.

Exercice 2 : Pile ou face infini (4 points)

a. Posons $A_n = F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n$ (aucun pile lors des n premiers lancers). La suite (A_n) est décroissante et, par indépendance des lancers, $P(A_n) = (1 - p)^n$. L'événement

« on n'obtient jamais pile » est $A = \bigcap_{n \geq 1} A_n$. Par **continuité décroissante**,
 $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1-p)^n = 0$ car $0 < 1-p < 1$. L'événement « jamais pile » est **négligeable**.

- b. « On obtient pile une infinité de fois » signifie : pour tout rang n , il existe $k \geq n$ tel que le k -ième lancer donne pile. C'est l'événement

$$I = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} P_k, \text{ de contraire } \bar{I} = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} F_k.$$

Pour n fixé, les événements $C_{n,m} = F_n \cap \dots \cap F_{n+m}$ forment une suite décroissante en m , de probabilité $(1-p)^{m+1}$. Par continuité décroissante, $P\left(\bigcap_{k \geq n} F_k\right) = 0$. Par sous-additivité (union dénombrable), $P(\bar{I}) \leq \sum_{n \geq 1} 0 = 0$. Donc $P(I) = 1$: **on obtient presque sûrement une infinité de piles**.

- c. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $(T = k) = F_1 \cap \dots \cap F_{k-1} \cap P_k$, donc par indépendance
 $P(T = k) = (1-p)^{k-1}p$: T suit la **loi géométrique** $\mathcal{G}(p)$. On vérifie :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1}p = p \times \frac{1}{1-(1-p)} = 1,$$

ce qui confirme que T est presque sûrement fini, en accord avec a).

Barème : a) 0,5 point pour la suite décroissante et sa probabilité, 0,5 point pour la continuité décroissante ; b) 0,5 point pour l'écriture ensembliste, 0,5 point pour la probabilité nulle de chaque intersection, 0,5 point pour la sous-additivité ; c) 1 point pour la loi, 0,5 point pour la vérification.

Exercice 3 : Loi géométrique, absence de mémoire et minimum **(5 points)**

- a. Pour $n \in \mathbb{N}$, par σ -additivité :

$$P(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} = p(1-p)^n \times \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^n.$$

$$P(X > n) = (1-p)^n.$$

b. Comme $(X > n+k) \subset (X > n)$ et $P(X > n) > 0$:

$$P(X > n+k | X > n) = \frac{P(X > n+k)}{P(X > n)} = \frac{(1-p)^{n+k}}{(1-p)^n} = (1-p)^k = P(X > k).$$

La loi géométrique est sans mémoire.

c. Posons $r = P(W > 1) > 0$ et $v_n = P(W > n)$. Comme $W \geq 1$, $v_0 = 1$.
L'hypothèse avec $k = 1$ donne $v_{n+1} = v_n r$ (car $(W > n+1) \subset (W > n)$), donc $v_n = r^n$.

Si l'on avait $r = 1$, on aurait $P(W > n) = 1$ pour tout n . Or la suite $(W > n)$ est décroissante d'intersection vide (W prend des valeurs finies), donc $P(W > n) \rightarrow 0$ par continuité décroissante : contradiction. Ainsi $r \in]0, 1[$.

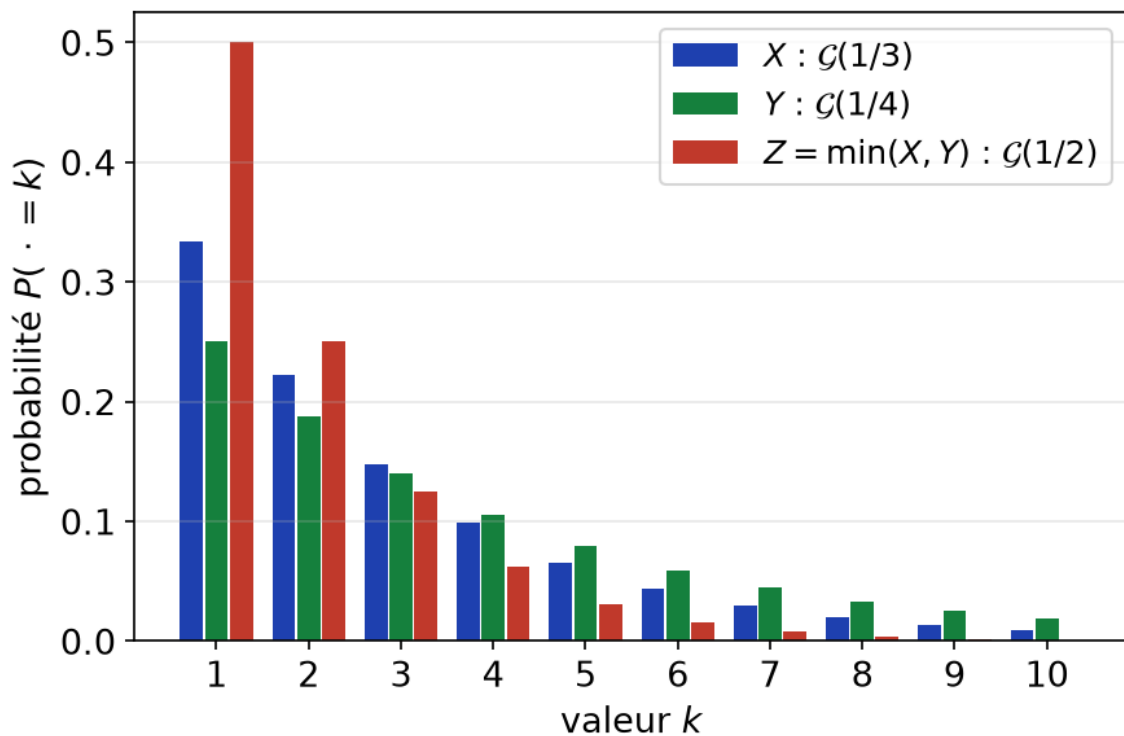
Pour $n \geq 1$, $P(W = n) = P(W > n-1) - P(W > n) = r^{n-1}(1-r)$. **W suit la loi géométrique de paramètre $1-r = P(W = 1)$.**

d. Z est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et $(Z > n) = (X > n) \cap (Y > n)$. Par indépendance de X et Y :

$$P(Z > n) = P(X > n) P(Y > n) = ((1-p)(1-q))^n = s^n, \quad s = (1-p)(1-q).$$

Pour $n \geq 1$, $P(Z = n) = s^{n-1} - s^n = s^{n-1}(1-s)$ avec $1-s = p+q-pq \in]0, 1[$. **Z suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p+q-pq)$.**

Illustration avec $p = \frac{1}{3}$ et $q = \frac{1}{4}$: $p+q-pq = \frac{4+3-1}{12} = \frac{1}{2}$, et le minimum est plus concentré sur les petites valeurs que X et Y .



Erreur fréquente : écrire $P(Z = n) = P(X = n)P(Y = n)$. L'événement $(Z = n)$ n'est pas $(X = n) \cap (Y = n)$; il faut passer par $P(Z > n)$.

Barème : a) 0,5 point pour la somme, 0,5 point pour le résultat ; b) 0,5 point pour l'inclusion, 0,5 point pour le calcul ; c) 0,5 point pour $v_n = r^n$, 0,5 point pour $r < 1$, 0,5 point pour la loi ; d) 0,5 point pour l'indépendance, 0,5 point pour $P(Z > n)$, 0,5 point pour la loi.

Exercice 4 : Problème : lois de Poisson et clients d'un magasin **(8 points)**

Partie A.

- a. $X + Y$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $(X + Y = n)$ est la réunion disjointe des $(X = k) \cap (Y = n - k)$, $0 \leq k \leq n$. Par indépendance :

$$P(X + Y = n) = \sum_{k=0}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\mu} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k} = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!},$$

par la formule du binôme. $X + Y$ suit la loi $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

b. $P(X + Y = n) > 0$. Pour $0 \leq k \leq n$:

$$P(X = k | X + Y = n) = \frac{P(X = k) P(Y = n - k)}{P(X + Y = n)} = \frac{n!}{k! (n-k)!} \frac{\lambda^k \mu^{n-k}}{(\lambda + \mu)^n} = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^{n-k},$$

et cette probabilité est nulle pour $k > n$. Sachant $(X + Y = n)$, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)$.

Partie B.

c. Par la formule des probabilités composées, pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n$:

$$P(N = n, S = k) = P(N = n) P(S = k | N = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

et $P(N = n, S = k) = 0$ si $k > n$, puisque $S \leq N$.

d. La famille $(N = n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. Pour $k \in \mathbb{N}$, par la formule des probabilités totales :

$$P(S = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{k! (n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!} = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{\lambda(1-p)}.$$

Donc $P(S = k) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}$: S suit la loi $\mathcal{P}(\lambda p)$.

e. Pour $(k, j) \in \mathbb{N}^2$, $(S = k, R = j) = (N = k + j, S = k)$, donc

$$P(S = k, R = j) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+j}}{k! j!} p^k (1-p)^j = e^{-\lambda} p \frac{(\lambda p)^k}{k!} \times e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!}.$$

En sommant sur $k \in \mathbb{N}$, on obtient $P(R = j) = e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!}$: R suit la loi $\mathcal{P}(\lambda(1-p))$. L'égalité ci-dessus s'écrit alors

$P(S = k, R = j) = P(S = k) P(R = j)$ pour tous k, j : S et R sont indépendantes.

f. Pour $j \in \mathbb{N}$, $P(S = k) > 0$ et, par e) :

$$P(N = k + j \mid S = k) = \frac{P(S = k, R = j)}{P(S = k)} = P(R = j) = e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!}.$$

Sachant $(S = k)$, $N - k$ **suit la loi** $\mathcal{P}(\lambda(1 - p))$. Connaître le nombre d'acheteurs n'apporte aucune information sur le nombre de clients qui n'ont rien acheté : c'est la traduction de l'indépendance de S et R , propriété remarquable du « découpage » d'une loi de Poisson.

Erreur fréquente : oublier que la somme donnant $P(S = k)$ commence à $n = k$, ce qui fausse le changement d'indice $j = n - k$.

Barème : a) 0,5 point pour la décomposition, 0,5 point pour l'indépendance, 0,5 point pour le binôme ; b) 1 point pour le calcul, 0,5 point pour la loi binomiale ; c) 0,5 point pour la formule, 0,5 point pour le cas $k > n$; d) 0,5 point pour les probabilités totales, 0,5 point pour le changement d'indice, 0,5 point pour la loi ; e) 0,5 point pour la loi du couple, 0,5 point pour la loi de R , 0,5 point pour l'indépendance ; f) 0,5 point pour le calcul, 0,5 point pour le commentaire.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : espaces probabilisés et variables discrètes

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Espaces probabilisés](#) » en maths spé et « [Variables aléatoires discrètes](#) » en maths spé puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [espaces probabilisés](#), [variables aléatoires discrètes](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths spé classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).