Corrigé du contrôle de maths spé : équations différentielles linéaires

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : théorème de Cauchy linéaire	3 points
Exercice 2 : Wronskien et deuxième solution	4 points
Exercice 3 : Variation des constantes	4 points
Exercice 4 : Solutions développables en série entière	4 points
Exercice 5 : Problème : équations non normalisées et raccordements	5 points
Total	**20 points**

Exercice 1 : Question de cours : théorème de Cauchy linéaire (3 points)

a. **Théorème de Cauchy linéaire.** Si $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathbb{K}^n$ sont continues, alors pour tout $t_0 \in I$ et tout $X_0 \in \mathbb{K}^n$, **le problème de Cauchy** $X' = A(t)\,X + B(t)$, $X(t_0) = X_0$ **admet une unique solution définie sur** I **tout entier**.

b. La fonction nulle est solution de (H). Si X et Y sont solutions et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $(\lambda\,X + Y)' = \lambda\,A(t)\,X + A(t)\,Y = A(t)(\lambda\,X + Y)$. Donc S_H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

L'application φ est linéaire, car l'évaluation en t_0 l'est. Le théorème de Cauchy linéaire, appliqué avec $B = 0$, donne ensuite deux choses. D'abord, pour tout X_0, il existe une solution telle que $X(t_0) = X_0$: φ est surjective. Ensuite, si $\varphi(X) = 0$, alors X et la fonction nulle résolvent le même problème de Cauchy, donc $X = 0$: φ est injective.

Ainsi φ est un isomorphisme et $\dim S_H = n$.

c. La fonction y est solution si et seulement si $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ vérifie $Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} Y$. Cette matrice dépend continûment de t. De plus, $y \to Y$ est un isomorphisme entre les deux espaces de solutions. **L'espace des solutions est donc de dimension 2.**

Barème : a) 1 point (hypothèse de continuité, existence et unicité, solution définie sur tout I) ; b) 0,5 point pour la structure de sous-espace, 0,75 point pour l'isomorphisme, 0,25 point pour la dimension ; c) 0,5 point.

Exercice 2 : Wronskien et deuxième solution (4 points)

a. Pour $y_1 = e^t$, on a $y_1' = y_1'' = e^t$. Donc $t\,e^t - (t+1)\,e^t + e^t = 0$. **La fonction y_1 est solution de (E_2) sur I.**

b. Sur I, on a $t \neq 0$, donc toute solution vérifie $y'' = \left(1 + \frac{1}{t}\right) y' - \frac{1}{t}\, y$. Or $W' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - y_1' y_2' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2$. En remplaçant, les termes en $\frac{1}{t}\, y_1 y_2$ se compensent, et il reste

$$W'(t) = \left(1 + \tfrac{1}{t}\right)\left(y_1\, y_2' - y_1'\, y_2\right) = \left(1 + \tfrac{1}{t}\right) W(t).$$

C'est une équation linéaire d'ordre 1. Une primitive de $1+\frac{1}{t}$ sur I est $t+\ln t$. **Donc $W(t) = K\, e^{t+\ln t} = K\, t\, e^{t}$, avec K constante.**

c. Comme y_1 ne s'annule pas, on a $\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_1\, y_2' - y_1'\, y_2}{y_1^2} = \frac{W}{y_1^2}$. Avec $W(t) = -t\, e^{t}$, on obtient $\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = -t\, e^{-t}$.

Or $t \to (t+1)\, e^{-t}$ a pour dérivée $e^{-t} - (t+1)\, e^{-t} = -t\, e^{-t}$. On peut donc prendre $\frac{y_2}{y_1} = (t+1)\, e^{-t}$, c'est-à-dire $y_2(t) = t+1$.

Vérification : $y_2'' = 0$ et $-(t+1)\times 1 + (t+1) = 0$. De plus, $W = e^{t}\times 1 - e^{t}\,(t+1) = -t\, e^{t}$. **La fonction $y_2 : t \to t+1$ convient.**

d. L'équation, normalisée sur I, a des coefficients continus. Par le théorème de Cauchy linéaire, son espace de solutions est donc de dimension 2. Le wronskien $-t\, e^{t}$ ne s'annule pas sur I, donc (y_1, y_2) est libre. **C'est une base, et les solutions sont les $y = \alpha\, e^{t} + \beta\,(t+1)$.**

Les conditions donnent $\alpha\, e + 2\beta = 0$ et $\alpha\, e + \beta = 1$. Par différence, $\beta = -1$, puis $\alpha = \frac{2}{e}$. **La solution cherchée est $y(t) = 2\, e^{t-1} - t - 1$.** On vérifie que $y(1) = 2 - 2 = 0$ et $y'(1) = 2 - 1 = 1$.

Barème : a) 0,5 point ; b) 0,5 point pour l'équation de W, 0,5 point pour la résolution ; c) 0,5 point pour la dérivée du quotient, 0,5 point pour la primitive, 0,5 point pour y_2 et la vérification ; d) 0,5 point pour la base (dimension et wronskien), 0,5 point pour la solution du problème de Cauchy.

Exercice 3 : Variation des constantes (4 points)

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

a. L'équation caractéristique $r^2+1=0$ a pour racines $\pm i$. **Les solutions homogènes sont les** $t \to A\cos t + B\sin t$**, avec** $A, B \in \mathbb{R}$**.**

b. On cherche $y = \lambda\cos t + \mu\sin t$, avec λ, μ dérivables et $\lambda'\cos t + \mu'\sin t = 0$. Alors $y' = -\lambda\sin t + \mu\cos t$, puis $y'' = -\lambda\cos t - \mu\sin t - \lambda'\sin t + \mu'\cos t$. Ainsi y est solution si et seulement si

$$\begin{cases} \lambda'\cos t + \mu'\sin t = 0 \\ -\lambda'\sin t + \mu'\cos t = \dfrac{1}{\cos t} \end{cases}$$

Le déterminant de ce système vaut $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$: c'est le wronskien de $(\cos, \sin)$. Par les formules de Cramer, $\lambda' = -\sin t \times \frac{1}{\cos t} = -\tan t$ et $\mu' = \cos t \times \frac{1}{\cos t} = 1$.

Sur J, on a $\cos t > 0$. On peut donc prendre $\lambda(t) = \ln(\cos t)$ et $\mu(t) = t$. **Une solution particulière est** $y_p(t) = \cos t\,\ln(\cos t) + t\sin t$**.**

c. Par le principe de superposition, **les solutions de** (E_3) **sur** J **sont les** $y(t) = A\cos t + B\sin t + \cos t\,\ln(\cos t) + t\sin t$**, avec** $A, B \in \mathbb{R}$**.**

d. L'équation s'écrit $y'' = -y + \frac{1}{\cos t}$, avec un second membre continu sur J. Le théorème de Cauchy linéaire assure donc l'existence et l'unicité de la solution. On calcule
$y_p(0) = 1 \times \ln 1 + 0 = 0$ et
$y_p'(t) = -\sin t\,\ln(\cos t) - \sin t + \sin t + t\cos t = -\sin t\,\ln(\cos t) + t\cos t$, d'où
$y_p'(0) = 0$.

La solution cherchée est $y_p : t \to \cos t\,\ln(\cos t) + t\sin t$**.**

Erreur fréquente : oublier la condition $\lambda'\cos t + \mu'\sin t = 0$ et dériver deux fois un produit sans

la simplifier, ce qui fait apparaître des dérivées secondes de λ et μ.

Barème : a) 0,5 point ; b) 1 point pour le système, 0,5 point pour sa résolution, 0,5 point pour les primitives (signe de $\cos t$ justifié) ; c) 0,5 point ; d) 0,5 point pour la justification par le théorème de Cauchy, 0,5 point pour la solution.

Exercice 4 : Solutions développables en série entière (4 points)

a. Sur $]-R, R[$, on peut dériver terme à terme. Ainsi $f'(x) = \sum_{n \geq 1} n\, a_n\, x^{n-1}$ et $f''(x) = \sum_{n \geq 2} n(n-1)\, a_n\, x^{n-2}$. On obtient

$$4x\, f''(x) + 2\, f'(x) = \sum_{n \geq 1} \big(4n(n-1) + 2n\big)\, a_n\, x^{n-1} = \sum_{n \geq 0} 2(n+1)(2n+1)\, a_{n+1}\, x^n.$$

Par unicité des coefficients d'une série entière, f est solution si et seulement si, pour tout $n \geq 0$, $2(n+1)(2n+1)\, a_{n+1} = a_n$. Autrement dit, $a_{n+1} = \frac{a_n}{(2n+1)(2n+2)}$. Par récurrence, $a_n = \frac{a_0}{(2n)!}$ **pour tout** n.

Réciproquement, pour $a_0 \neq 0$, on a $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \to 0$. La règle de d'Alembert donne donc $R = +\infty$. Le calcul précédent est alors valable sur $\mathbb{R}$.

b. Pour $x > 0$, $\sum \frac{x^n}{(2n)!} = \sum \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!}$. Pour $x < 0$, on écrit $x^n = (-1)^n (\sqrt{-x})^{2n}$. **On obtient** $f(x) = \operatorname{ch}(\sqrt{x})$ **pour** $x > 0$ **et** $f(x) = \cos(\sqrt{-x})$ **pour** $x < 0$**.**

c. Pour $x > 0$, on a $g'(x) = \frac{\operatorname{ch}(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$. Puis $g''(x) = \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{x})}{4x} - \frac{\operatorname{ch}(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}}$. Donc

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$$4x\,g'' + 2\,g' - g = \operatorname{sh}\sqrt{x} - \frac{\operatorname{ch}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{\operatorname{ch}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \operatorname{sh}\sqrt{x} = 0.$$

Sur $]0, +\infty[$, l'équation se normalise en $y'' = -\frac{1}{2x}\,y' + \frac{1}{4x}\,y$, à coefficients continus. Par le théorème de Cauchy linéaire, l'espace des solutions est de dimension 2. Or f et g sont solutions, et $\frac{g}{f} = \operatorname{th}\sqrt{x}$ n'est pas constante : la famille est libre. **Les solutions sur $]0, +\infty[$ sont donc les $y = \alpha \operatorname{ch}\sqrt{x} + \beta \operatorname{sh}\sqrt{x}$.**

d. On a $y'(x) = \frac{\alpha}{2} \times \frac{\operatorname{sh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{\beta \operatorname{ch}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$. Quand $x \to 0^+$, le premier terme tend vers $\frac{\alpha}{2}$, car $\frac{\operatorname{sh} u}{u} \to 1$. En revanche, le second tend vers $\pm\infty$ dès que $\beta \neq 0$.

Les solutions cherchées sont exactement les $\alpha \operatorname{ch}\sqrt{x}$: ce sont les restrictions des solutions développables en série entière de la question a. Les solutions développables en série entière forment une droite, alors que l'espace des solutions sur $]0, +\infty[$ est un plan : le point 0, où le coefficient de y'' s'annule, est singulier.

Barème : a) 0,5 point pour la dérivation terme à terme et le décalage d'indice, 0,5 point pour la récurrence et a_n, 0,5 point pour R ; b) 0,5 point ; c) 0,5 point pour la vérification, 0,5 point pour la dimension et la liberté ; d) 0,5 point pour l'étude de la limite, 0,5 point pour la conclusion.

Exercice 5 : Problème : équations non normalisées et raccordements (5 points)

Partie A : l'équation x y′ − 2y = x³

a. Sur $]0, +\infty[$, l'équation s'écrit $y' - \frac{2}{x}\,y = x^2$. Les solutions homogènes sont les $C\,x^2$, car $\exp(2\ln x) = x^2$. Ensuite, $y = x^3$ est une solution particulière : $x \times 3x^2 - 2x^3 = x^3$. Le même calcul vaut sur $]-\infty, 0[$, puisque $\exp(2\ln|x|) = x^2$

.

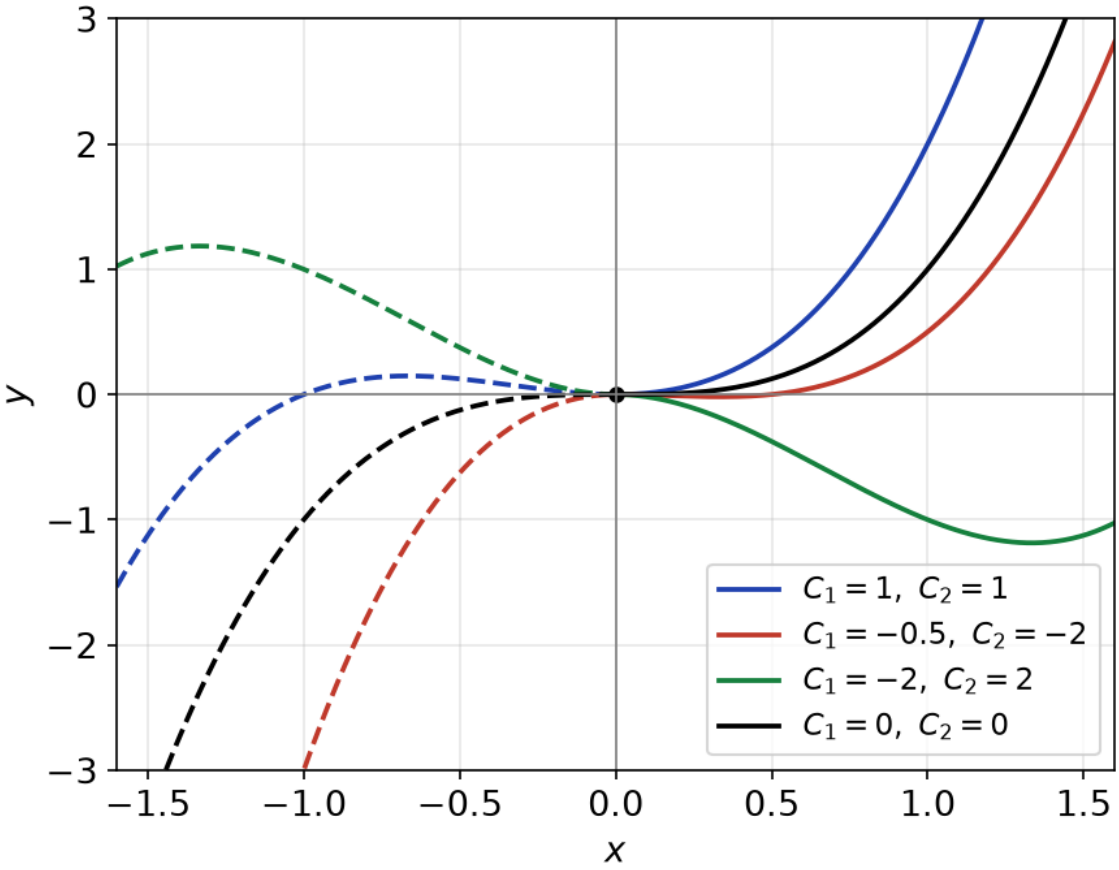
Les solutions sont $y = x^3 + C_1 x^2$ **sur** $]0, +\infty[$ **et** $y = x^3 + C_2 x^2$ **sur** $]-\infty, 0[$ **.**

b. **Analyse.** Soit y une solution sur $\mathbb{R}$. Ses restrictions sont solutions sur chaque demi-droite, donc il existe C_1, C_2 tels que $y(x) = x^3 + C_1 x^2$ pour $x > 0$ et $y(x) = x^3 + C_2 x^2$ pour $x < 0$. Par continuité en 0, $y(0) = 0$, ce que confirme l'équation en $x = 0$: $-2y(0) = 0$.

Synthèse. Soit y ainsi définie, avec $y(0) = 0$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et vérifie l'équation. En 0, le taux d'accroissement vaut $\frac{y(x)}{x} = x^2 + C_i x$, qui tend vers 0 des deux côtés. Donc y est dérivable en 0, avec $y'(0) = 0$. L'équation en 0 s'écrit alors $0 \times 0 - 2 \times 0 = 0$: elle est vérifiée.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ **sont les fonctions égales à** $x^3 + C_1 x^2$ **pour** $x \geq 0$ **et à** $x^3 + C_2 x^2$ **pour** $x < 0$**, avec** C_1 **et** C_2 **réels quelconques.**

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.



c. La direction est l'ensemble des solutions homogènes $x \to C_1 x^2$ (pour $x \geq 0$) et $C_2 x^2$ (pour $x < 0$). Elle est engendrée par $x \to x^2 1_{x \geq 0}$ et $x \to x^2 1_{x < 0}$. **Elle est donc de dimension 2, alors que l'équation est d'ordre 1.**

Il n'y a pas de contradiction. En effet, le théorème de Cauchy linéaire ne s'applique qu'à une équation normalisée $y' = a(x)\, y + b(x)$, avec a, b continues. Or on ne peut pas diviser par x sur un intervalle contenant 0.

Toutes les solutions vérifient $y(0) = 0$. **Il y en a donc une infinité avec $y(0) = 0$, et aucune avec $y(0) = 1$.** Enfin, $y(1) = 1 + C_1 = 2$ donne $C_1 = 1$, et $y(-1) = -1 + C_2 = 0$ donne $C_2 = 1$. **La solution cherchée est $y(x) = x^3 + x^2$ sur $\mathbb{R}$.**

d. La fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. Sa dérivée vaut $3x^2 + 2C_1 x$ pour $x > 0$, $3x^2 + 2C_2 x$ pour $x < 0$ et 0 en 0. Elle est donc continue : y est de classe $\mathcal{C}^1$. Le taux d'accroissement de y' en 0 tend vers $2C_1$ à droite et vers $2C_2$ à gauche. **Les**

solutions de classe $\mathcal{C}^2$ sont donc celles avec $C_1 = C_2$, c'est-à-dire les $x \to x^3 + C\,x^2$. Dans ce cas, $y''(x) = 6x + 2C$ est bien continue.

Partie B : l'équation x y′ + y = 2x

e. On remarque que $x\,y' + y = (x\,y)'$. Sur chacun des intervalles $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$, l'équation équivaut donc à $(xy)' = 2x$, soit $xy = x^2 + C$. **Les solutions sont $y = x + \frac{C_1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ et $y = x + \frac{C_2}{x}$ sur $]-\infty, 0[$.**

Si y est solution sur $\mathbb{R}$, elle est continue en 0, donc bornée au voisinage de 0. Or $\frac{C_1}{x}$ n'est bornée au voisinage de 0^+ que si $C_1 = 0$; de même, $C_2 = 0$. Donc $y(x) = x$ sur $\mathbb{R}^*$, puis $y(0) = 0$ par continuité. Réciproquement, $y = x$ convient : $x \times 1 + x = 2x$. **L'unique solution de (F) sur $\mathbb{R}$ est $x \to x$.**

Barème : a) 0,5 point par demi-droite ; b) 0,5 point pour l'analyse, 1 point pour la synthèse (dérivabilité en 0 démontrée) ; c) 0,25 point pour la dimension, 0,25 point pour l'explication, 0,25 point pour les problèmes en 0, 0,25 point pour la solution avec y(1) et y(−1) ; d) 0,5 point ; e) 0,5 point pour les solutions sur chaque demi-droite, 0,5 point pour le raccordement.

Revenir à l'énoncé du contrôle

Après le corrigé du contrôle : équations différentielles linéaires

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « Équations différentielles linéaires » en maths spé puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** équations différentielles linéaires.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Retrouvez tous les **contrôles de maths spé** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.