

Corrigé du contrôle de maths spé : éléments propres et polynôme caractéristique

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours	4 points
Exercice 2 : Spectre d'une matrice à paramètre	5 points
Exercice 3 : Matrices triangulaires par blocs	4 points
Exercice 4 : Endomorphismes qui commutent	3 points
Exercice 5 : Polynômes caractéristiques de AB et BA	4 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours (4 points)

- a. Montrons par récurrence sur $p \geq 1$ la propriété : si $x_1 + \dots + x_p = 0$ avec $x_i \in E_{\lambda_i}(u)$ et des λ_i deux à deux distincts, alors tous les x_i sont nuls. C'est la définition d'une somme directe.

Initialisation. Pour $p = 1$, l'égalité $x_1 = 0$ donne le résultat.

Hérédité. Supposons la propriété vraie au rang $p - 1$, et soit $x_1 + \dots + x_p = 0$. En appliquant u , on obtient $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p = 0$. En retranchant λ_p fois la première égalité, il vient

$$(\lambda_1 - \lambda_p)x_1 + \dots + (\lambda_{p-1} - \lambda_p)x_{p-1} = 0.$$

Chaque vecteur $(\lambda_i - \lambda_p)x_i$ appartient à $E_{\lambda_i}(u)$. L'hypothèse de récurrence donne donc $(\lambda_i - \lambda_p)x_i = 0$ pour $i \leq p-1$. Comme $\lambda_i \neq \lambda_p$, on obtient $x_i = 0$ pour $i \leq p-1$, puis $x_p = 0$.

La somme des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe.

b. Par la formule du déterminant, en notant δ_{ij} le symbole de Kronecker,

$$\chi_A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n (X \delta_{\sigma(j)j} - a_{\sigma(j)j}).$$

Si $\sigma \neq \text{id}$, alors σ déplace au moins deux indices : le produit correspondant contient au plus $n-2$ facteurs de degré 1 et il est de degré au plus $n-2$. Le terme associé à l'identité vaut $\prod_{j=1}^n (X - a_{jj}) = X^n - (a_{11} + \dots + a_{nn})X^{n-1} + R$, avec $\deg R \leq n-2$.

Ainsi χ_A est unitaire, de degré n , et son coefficient de X^{n-1} est $-\text{tr}(A)$. Enfin, le coefficient constant vaut $\chi_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$ par n -linéarité. **Donc** $\chi_A = X^n - \text{tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$.

Barème : a) 2 points : 0,5 pour la mise en place de la récurrence, 1 pour l'application de u et la soustraction, 0,5 pour la conclusion ; b) 2 points : 1 pour la majoration du degré des termes $\sigma \neq \text{id}$, 0,5 pour le coefficient de X^{n-1} , 0,5 pour le coefficient constant.

Exercice 2 : Spectre d'une matrice à paramètre (5 points)

a. On développe selon la deuxième ligne :

$$\chi_{A_m} = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -m \\ 0 & X-2 & 0 \\ -1 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X-2) \begin{vmatrix} X-1 & -m \\ -1 & X-1 \end{vmatrix}.$$

Ainsi $\chi_{A_m} = (X-2)((X-1)^2 - m)$. Vérification : la trace vaut 4 et le coefficient de X^2 dans $(X-2)(X^2 - 2X + 1 - m)$ vaut bien -4 .

b. Les valeurs propres réelles sont 2 et les racines réelles de $(X-1)^2 = m$.

Si $m < 0$: $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A_m) = \{2\}$, valeur propre simple.

Si $m = 0$: $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A_0) = \{1, 2\}$, 1 double et 2 simple.

Si $m > 0$, les racines sont $1 - \sqrt{m}$ et $1 + \sqrt{m}$. On a $1 - \sqrt{m} < 1 < 2$, et $1 + \sqrt{m} = 2$ si et seulement si $m = 1$.

Pour $m > 0$ et $m \neq 1$: $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A_m) = \{1 - \sqrt{m}, 1 + \sqrt{m}, 2\}$, trois valeurs propres simples.

Pour $m = 1$: $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A_1) = \{0, 2\}$, 0 simple et 2 double.

c. Pour $m = 1$, on résout $A_1 X = 0$ puis $(A_1 - 2I_3)X = 0$ avec $X = (x, y, z)$.

E_0 : le système $x + z = 0$, $2y = 0$ donne $y = 0$ et $z = -x$. **Donc**
 $E_0(A_1) = \text{Vect}((1, 0, -1))$.

E_2 : $A_1 - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, d'où la seule équation $x = z$, avec y quelconque.

Donc $E_2(A_1) = \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 0))$, de dimension 2.

d. Pour $m = -4$, $(X-1)^2 + 4 = 0$ équivaut à $X-1 = \pm 2i$. **Donc**
 $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A_{-4}) = \{2, 1 + 2i, 1 - 2i\}$.

Pour $\lambda = 1 + 2i$, le système $(A_{-4} - \lambda I_3)X = 0$ s'écrit $-2ix - 4z = 0$,
 $(1 - 2i)y = 0$, $x - 2iz = 0$. On obtient $y = 0$ et $x = 2iz$; la première équation est alors vérifiée, car $-2i \times 2iz - 4z = 4z - 4z = 0$. **Le vecteur $(2i, 0, 1)$ est un vecteur propre associé à $1 + 2i$.**

Barème : a) 1 point ; b) 1,5 point : 0,5 pour $m < 0$ et $m = 0$, 0,5 pour $m > 0$, 0,5 pour le cas particulier $m = 1$; c) 1,5 point : 0,5 pour E_0 , 1 pour E_2 ; d) 1 point : 0,5 pour le spectre, 0,5 pour le vecteur propre.

Erreur fréquente : oublier le cas $m = 1$, où la valeur propre $1 + \sqrt{m}$ se confond avec 2.

Exercice 3 : Matrices triangulaires par blocs (4 points)

a. On a $XI_{p+q} - M = \begin{pmatrix} XI_p - A & -B \\ 0 & XI_q - D \end{pmatrix}$. Pour tout scalaire x , la formule admise donne $\chi_M(x) = \chi_A(x) \chi_D(x)$. Deux polynômes qui coïncident en une infinité de points sont égaux. **Donc** $\chi_M = \chi_A \chi_D$.

b. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F , complétée en une base $\mathcal{B}$ de E . Comme F est stable par u , les images $u(e_1), \dots, u(e_p)$ appartiennent à F . La matrice de u dans $\mathcal{B}$ est donc triangulaire par blocs, $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$, où A est la matrice de $u|_F$. D'après a), $\chi_u = \chi_{u|_F} \chi_D$. **Ainsi** $\chi_{u|_F}$ **divise** χ_u .

c. La matrice M est triangulaire par blocs avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Pour une matrice de taille 2, $\chi = X^2 - \text{tr} \times X + \det$.

$$\text{D'une part, } \chi_A = X^2 - 3X + (2 - 6) = X^2 - 3X - 4 = (X - 4)(X + 1).$$

$$\text{D'autre part, } \chi_D = X^2 - 4X + 3 = (X - 1)(X - 3).$$

$$\text{Donc } \chi_M = (X + 1)(X - 1)(X - 3)(X - 4) \text{ et } \text{Sp}(M) = \{-1, 1, 3, 4\}.$$

d. On cherche un vecteur de la forme $(x, y, 0, 0)$, qui appartient au sous-espace stable $\text{Vect}(e_1, e_2)$. Il suffit que (x, y) soit vecteur propre de A pour 4. Le système $(A - 4I_2)(x, y) = 0$ s'écrit $-3x + 2y = 0$, d'où $(x, y) = (2, 3)$. Vérification : $M(2, 3, 0, 0) = (2 + 6, 6 + 6, 0, 0) = (8, 12, 0, 0) = 4(2, 3, 0, 0)$. **Le vecteur** $(2, 3, 0, 0)$ **est vecteur propre de** M **pour la valeur propre 4.**

Barème : a) 0,5 point ; b) 1 point : 0,5 pour la base adaptée, 0,5 pour la conclusion ; c) 1,5 point : 0,5 pour chaque polynôme de taille 2, 0,5 pour le spectre ; d) 1 point.

Exercice 4 : Endomorphismes qui commutent (3 points)

- a. Si $x \in \ker u$, alors $u(v(x)) = v(u(x)) = v(0) = 0$, donc $v(x) \in \ker u$. Si $y = u(x) \in \operatorname{Im} u$, alors $v(y) = u(v(x)) \in \operatorname{Im} u$. Enfin, $u - \lambda \operatorname{id}$ commute avec v , et $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \operatorname{id})$. Le premier point, appliqué à $u - \lambda \operatorname{id}$, montre alors que $\ker u$, $\operatorname{Im} u$ et $E_\lambda(u)$ sont stables par v .
- b. Les n sous-espaces propres de u sont de dimension au moins 1 et en somme directe dans E , de dimension n . Chacun est donc une droite. Soit x un vecteur propre de u pour λ : alors $E_\lambda(u) = \mathbb{K}x$. Cette droite est stable par v d'après a), donc $v(x) = \mu x$ pour un certain $\mu \in \mathbb{K}$. Comme $x \neq 0$, x est un vecteur propre de v .
- c. La matrice D a trois valeurs propres distinctes, de vecteurs propres e_1, e_2, e_3 . Si B commute avec D , alors chaque e_j est vecteur propre de B d'après b) : $Be_j = \mu_j e_j$, et B est diagonale. Réciproquement, deux matrices diagonales commutent. **Les matrices qui commutent avec D sont exactement les matrices diagonales.**

Barème : a) 1 point : 0,5 pour le noyau et l'image, 0,5 pour les sous-espaces propres ; b) 1 point : 0,5 pour les droites propres, 0,5 pour la conclusion ; c) 1 point : 0,5 pour chaque inclusion.

Exercice 5 : Polynômes caractéristiques de AB et BA (4 points)

- a. On a $A(BA)A^{-1} = AB(AA^{-1}) = AB$. Ainsi AB et BA sont semblables. Or deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, car

$$\det(XI_n - PCP^{-1}) = \det(P(XI_n - C)P^{-1}) = \det(XI_n - C).$$

Donc $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ lorsque A est inversible.

- b. Soit $\lambda \neq 0$ une valeur propre de AB , et $x \neq 0$ tel que $ABx = \lambda x$. Alors $Bx \neq 0$, car sinon $\lambda x = 0$, ce qui est exclu. De plus, $BA(Bx) = B(ABx) = \lambda Bx$. Donc λ est valeur propre de BA , de vecteur propre Bx . Par symétrie des rôles, **AB et BA ont les mêmes valeurs propres non nulles.**
- c. 0 est valeur propre de AB si et seulement si $\det(AB) = 0$. Or $\det(AB) = \det A \det B = \det(BA)$. **Donc 0 est valeur propre de AB si et seulement si 0 est valeur propre de BA .**

- d. Un calcul direct donne $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les deux ont pour polynôme caractéristique X^2 . Cependant, $E_0(AB) = \ker(AB) = \text{Vect}(e_1)$ est de dimension 1, alors que $E_0(BA) = \mathbb{K}^2$ est de dimension 2. **AB et BA ne sont pas semblables** : la seule matrice semblable à la matrice nulle est la matrice nulle elle-même.
- e. D'après l'exercice 1 b), la trace est l'opposé du coefficient de X^{n-1} du polynôme caractéristique. L'égalité $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ donne donc $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Barème : a) 1 point : 0,5 pour la similitude, 0,5 pour l'invariance du polynôme caractéristique ; b) 1 point : 0,5 pour $Bx \neq 0$, 0,5 pour la conclusion ; c) 0,5 point ; d) 1 point : 0,5 pour les calculs, 0,5 pour la non-similitude ; e) 0,5 point.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : éléments propres et polynôme caractéristique

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours [« Éléments propres » en maths spé](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [éléments propres](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths spé classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths spé sur ce thème

- [Contrôle de maths spé : DS de réduction des endomorphismes](#)