Corrigé du contrôle de maths spé : éléments propres et polynôme caractéristique

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours	4 points
Exercice 2 : Spectre d'une matrice à paramètre	5 points
Exercice 3 : Matrices triangulaires par blocs	4 points
Exercice 4 : Endomorphismes qui commutent	3 points
Exercice 5 : Polynômes caractéristiques de AB et BA	4 points
Total	**20 points**

Exercice 1 : Question de cours (4 points)

a. Montrons par récurrence sur $p \geq 1$ la propriété : si $x_1 + \ldots + x_p = 0$ avec $x_i \in E_{\lambda_i}(u)$ et des λ_i deux à deux distincts, alors tous les x_i sont nuls. C'est la définition d'une somme directe.

Initialisation. Pour $p = 1$, l'égalité $x_1 = 0$ donne le résultat.

Hérédité. Supposons la propriété vraie au rang $p-1$, et soit $x_1 + \ldots + x_p = 0$. En appliquant u, on obtient $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_p x_p = 0$. En retranchant λ_p fois la première égalité, il vient

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$$(\lambda_1 - \lambda_p)x_1 + \ldots + (\lambda_{p-1} - \lambda_p)x_{p-1} = 0.$$

Chaque vecteur $(\lambda_i - \lambda_p)x_i$ appartient à $E_{\lambda_i}(u)$. L'hypothèse de récurrence donne donc $(\lambda_i - \lambda_p)x_i = 0$ pour $i \leq p-1$. Comme $\lambda_i \neq \lambda_p$, on obtient $x_i = 0$ pour $i \leq p-1$, puis $x_p = 0$.

La somme des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe.

b. Par la formule du déterminant, en notant δ_{ij} le symbole de Kronecker,

$$\chi_A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} \left(X\delta_{\sigma(j)j} - a_{\sigma(j)j} \right).$$

Si $\sigma \neq \mathrm{id}$, alors σ déplace au moins deux indices : le produit correspondant contient au plus $n-2$ facteurs de degré 1 et il est de degré au plus $n-2$. Le terme associé à l'identité vaut $\prod_{j=1}^{n}(X - a_{jj}) = X^n - (a_{11} + \ldots + a_{nn})X^{n-1} + R$, avec $\deg R \leq n-2$.

Ainsi χ_A est unitaire, de degré n, et son coefficient de X^{n-1} est $-\mathrm{tr}(A)$. Enfin, le coefficient constant vaut $\chi_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$ par n-linéarité. **Donc** $\chi_A = X^n - \mathrm{tr}(A)X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det(A)$.

Barème : a) 2 points : 0,5 pour la mise en place de la récurrence, 1 pour l'application de u et la soustraction, 0,5 pour la conclusion ; b) 2 points : 1 pour la majoration du degré des termes $\sigma \neq \mathrm{id}$, 0,5 pour le coefficient de X^{n-1}, 0,5 pour le coefficient constant.

Exercice 2 : Spectre d'une matrice à paramètre (5 points)

a. On développe selon la deuxième ligne :

$$\chi_{A_m} = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -m \\ 0 & X-2 & \\ -1 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X-2)\begin{vmatrix} X- & -m \\ -1 & X-1 \end{vmatrix}.$$

Ainsi $\chi_{A_m} = (X-2)\big((X-1)^2 - m\big)$ **.** Vérification : la trace vaut 4 et le coefficient de X^2 dans $(X-2)(X^2-2X+1-m)$ vaut bien -4 .

b. Les valeurs propres réelles sont 2 et les racines réelles de $(X-1)^2 = m$.

Si $m<0$: $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A_m) = \{2\}$, valeur propre simple.

Si $m=0$: $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A_0) = \{1,2\}$, 1 double et 2 simple.

Si $m>0$, les racines sont $1-\sqrt{m}$ et $1+\sqrt{m}$. On a $1-\sqrt{m}<1<2$, et $1+\sqrt{m}=2$ si et seulement si $m=1$.

Pour $m>0$ et $m\neq 1$: $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A_m) = \{1-\sqrt{m}, 1+\sqrt{m},\}, 2\}$, trois valeurs propres simples.

Pour $m=1$: $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A_1) = \{0,2\}$, 0 simple et 2 double.

c. Pour $m=1$, on résout $A_1 X = 0$ puis $(A_1 - 2I_3)X = 0$ avec $X=(x,y,z)$.

E_0 : le système $x+z=0$, $2y=0$ donne $y=0$ et $z=-x$. **Donc** $E_0(A_1) = \mathrm{Vect}\big((1,0,-1)\big)$**.**

E_2 : $A_1 - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & & \\ , & 0 & \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, d'où la seule équation $x=z$, avec y quelconque.
Donc $E_2(A_1) = \mathrm{Vect}\big((1,0,1),(0,1,0)\big)$, de dimension 2.

d. Pour $m=-4$, $(X-1)^2+4=0$ équivaut à $X-1=\pm 2i$. **Donc** $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A_{-4}) = \{2, 1+2i, 1-2i\}$**.**

Pour $\lambda = 1+2i$, le système $(A_{-4} - \lambda I_3)X = 0$ s'écrit $-2ix - 4z = 0$, $(1-2i)y=0$, $x-2iz=0$. On obtient $y=0$ et $x=2iz$; la première équation est alors vérifiée, car $-2i\times 2iz - 4z = 4z-4z=0$. **Le vecteur** $(2i,0,1)$ **est un vecteur propre associé à** $1+2i$ **.**

Barème : a) 1 point ; b) 1,5 point : 0,5 pour $m<0$ *et* $m=0$ *, 0,5 pour* $m>0$ *, 0,5 pour le cas particulier* $m=1$ *; c) 1,5 point : 0,5 pour* E_0 *, 1 pour* E_2 *; d) 1 point : 0,5 pour le spectre, 0,5 pour le vecteur propre.*

Erreur fréquente : oublier le cas $m=1$, où la valeur propre $1+\sqrt{m}$ se confond avec 2.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Exercice 3 : Matrices triangulaires par blocs (4 points)

a. On a $XI_{p+q} - M = \begin{pmatrix} XI_p - A & -B \\ 0 & XI_q - D \end{pmatrix}$. Pour tout scalaire x, la formule admise donne $\chi_M(x) = \chi_A(x)\,\chi_D(x)$. Deux polynômes qui coïncident en une infinité de points sont égaux. **Donc** $\chi_M = \chi_A\,\chi_D$.

b. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de F, complétée en une base $\mathcal{B}$ de E. Comme F est stable par u, les images $u(e_1), \ldots, u(e_p)$ appartiennent à F. La matrice de u dans $\mathcal{B}$ est donc triangulaire par blocs, $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$, où A est la matrice de u_F. D'après a), $\chi_u = \chi_{u_F}\,\chi_D$. **Ainsi** χ_{u_F} **divise** χ_u.

c. La matrice M est triangulaire par blocs avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Pour une matrice de taille 2, $\chi = X^2 - \mathrm{tr} \times X + \det$.

D'une part, $\chi_A = X^2 - 3X + (2-6) = X^2 - 3X - 4 = (X-4)(X+1)$.

D'autre part, $\chi_D = X^2 - 4X + 3 = (X-1)(X-3)$.

Donc $\chi_M = (X+1)(X-1)(X-3)(X-4)$ **et** $\mathrm{Sp}(M) = \{-1, 1, 3, 4\}$.

d. On cherche un vecteur de la forme $(x, y, 0, 0)$, qui appartient au sous-espace stable $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$. Il suffit que (x, y) soit vecteur propre de A pour 4. Le système $(A - 4I_2)(x, y) = 0$ s'écrit $-3x + 2y = 0$, d'où $(x, y) = (2, 3)$. Vérification : $M(2, 3, 0, 0) = (2+6, 6+6, 0, 0) = (8, 12, 0, 0) = 4(2, 3, 0, 0)$. **Le vecteur** $(2, 3, 0, 0)$ **est vecteur propre de** M **pour la valeur propre 4.**

Barème : a) 0,5 point ; b) 1 point : 0,5 pour la base adaptée, 0,5 pour la conclusion ; c) 1,5 point : 0,5 pour chaque polynôme de taille 2, 0,5 pour le spectre ; d) 1 point.

Exercice 4 : Endomorphismes qui commutent (3 points)

a. Si $x \in \ker u$, alors $u(v(x)) = v(u(x)) = v(0) = 0$, donc $v(x) \in \ker u$. Si $y = u(x) \in \operatorname{Im} u$, alors $v(y) = u(v(x)) \in \operatorname{Im} u$. Enfin, $u - \lambda \operatorname{id}$ commute avec v, et $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \operatorname{id})$. Le premier point, appliqué à $u - \lambda \operatorname{id}$, montre alors que **$\ker u$, $\operatorname{Im} u$ et $E_\lambda(u)$ sont stables par v.**

b. Les n sous-espaces propres de u sont de dimension au moins 1 et en somme directe dans E, de dimension n. Chacun est donc une droite. Soit x un vecteur propre de u pour λ : alors $E_\lambda(u) = \mathbb{K}x$. Cette droite est stable par v d'après a), donc $v(x) = \mu x$ pour un certain $\mu \in \mathbb{K}$. Comme $x \neq 0$, **x est un vecteur propre de v.**

c. La matrice D a trois valeurs propres distinctes, de vecteurs propres e_1, e_2, e_3. Si B commute avec D, alors chaque e_j est vecteur propre de B d'après b) : $Be_j = \mu_j e_j$, et B est diagonale. Réciproquement, deux matrices diagonales commutent. **Les matrices qui commutent avec D sont exactement les matrices diagonales.**

Barème : a) 1 point : 0,5 pour le noyau et l'image, 0,5 pour les sous-espaces propres ; b) 1 point : 0,5 pour les droites propres, 0,5 pour la conclusion ; c) 1 point : 0,5 pour chaque inclusion.

Exercice 5 : Polynômes caractéristiques de AB et BA (4 points)

a. On a $A(BA)A^{-1} = AB(AA^{-1}) = AB$. Ainsi AB et BA sont semblables. Or deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, car

$$\det(XI_n - PCP^{-1}) = \det\left(P(XI_n - C)P^{-1}\right) = \det(XI_n - C).$$

Donc $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ lorsque A est inversible.

b. Soit $\lambda \neq 0$ une valeur propre de AB, et $x \neq 0$ tel que $ABx = \lambda x$. Alors $Bx \neq 0$, car sinon $\lambda x = 0$, ce qui est exclu. De plus, $BA(Bx) = B(ABx) = \lambda Bx$. Donc λ est valeur propre de BA, de vecteur propre Bx. Par symétrie des rôles, **AB et BA ont les mêmes valeurs propres non nulles.**

c. 0 est valeur propre de AB si et seulement si $\det(AB) = 0$. Or $\det(AB) = \det A \det B = \det(BA)$. **Donc 0 est valeur propre de AB si et seulement si 0 est valeur propre de BA.**

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

d. Un calcul direct donne $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les deux ont pour polynôme caractéristique X^2. Cependant, $E_0(AB) = \ker(AB) = \text{Vect}(e_1)$ est de dimension 1, alors que $E_0(BA) = \mathbb{K}^2$ est de dimension 2. AB **et** BA **ne sont pas semblables** : la seule matrice semblable à la matrice nulle est la matrice nulle elle-même.

e. D'après l'exercice 1 b), la trace est l'opposé du coefficient de X^{n-1} du polynôme caractéristique. L'égalité $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ donne donc $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ **.**

Barème : a) 1 point : 0,5 pour la similitude, 0,5 pour l'invariance du polynôme caractéristique ; b) 1 point : 0,5 pour $Bx \neq 0$*, 0,5 pour la conclusion ; c) 0,5 point ; d) 1 point : 0,5 pour les calculs, 0,5 pour la non-similitude ; e) 0,5 point.*

Revenir à l'énoncé du contrôle

Après le corrigé du contrôle : éléments propres et polynôme caractéristique

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « Éléments propres » en maths spé puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** éléments propres.

Retrouvez tous les **contrôles de maths spé** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.

Autres contrôles de maths spé sur ce thème

- Contrôle de maths spé : DS de réduction des endomorphismes