

Corrigé du contrôle de maths spé : DS de réduction des endomorphismes

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Partie I : polynôme caractéristique d'une matrice compagnon	5 points
Exercice 2 : Partie II : trigonalisation d'un exemple	5 points
Exercice 3 : Partie III : l'endomorphisme de multiplication à gauche	5 points
Exercice 4 : Partie IV : lemme des noyaux et commutant	5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Partie I : polynôme caractéristique d'une matrice compagnon (5 points)

- a. La matrice $X I_n - C_P$ est à coefficients dans l'anneau commutatif $\mathbb{K}[X]$: elle porte X sur la diagonale, -1 juste sous la diagonale, et sa dernière colonne vaut $(a_0, a_1, \dots, a_{n-2}, X + a_{n-1})^T$. L'opération $L_1 \leftarrow L_1 + X L_2 + \dots + X^{n-1} L_n$ ajoute à la première ligne une combinaison des autres : elle ne change pas le déterminant.

Pour une colonne $j \leq n-1$, seuls deux coefficients sont non nuls : X en ligne j et -1 en ligne $j+1$. Le nouveau coefficient de la ligne 1 vaut donc $X^{j-1} \times X + X^j \times (-1) = 0$. Dans la dernière colonne, on obtient :

$$a_0 + X a_1 + \dots + X^{n-2} a_{n-2} + X^{n-1}(X + a_{n-1}) = P(X).$$

On développe alors selon la première ligne, qui vaut $(0, \dots, 0, P)$: $\chi_{C_P} = (-1)^{1+n} P \Delta$, où Δ est le déterminant obtenu en supprimant la ligne 1 et la colonne n . Cette matrice de taille $n-1$ est triangulaire supérieure, avec des -1 sur la diagonale, donc $\Delta = (-1)^{n-1}$.

Par conséquent $\chi_{C_P} = (-1)^{n+1}(-1)^{n-1} P = P$.

- b. Les $n-1$ premières colonnes de $C_P - \lambda I_n$ sont $e_{k+1} - \lambda e_k$ pour $1 \leq k \leq n-1$. Elles forment une famille libre : si $\sum_k c_k (e_{k+1} - \lambda e_k) = 0$, la coordonnée sur e_n donne $c_{n-1} = 0$, puis, en remontant, tous les c_k sont nuls. Donc $\text{rg}(C_P - \lambda I_n) \geq n-1$. Comme λ est valeur propre, cette matrice n'est pas inversible : son rang vaut exactement $n-1$. D'après le théorème du rang, **le sous-espace propre $E_\lambda(C_P)$ est une droite.**

Ensuite, la ligne $k \leq n-1$ de C_P^T est e_{k+1}^T , donc $(C_P^T V_\lambda)_k = \lambda^k = \lambda \times \lambda^{k-1}$. La dernière ligne de C_P^T est $(-a_0, \dots, -a_{n-1})$, d'où :

$$(C_P^T V_\lambda)_n = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i = \lambda^n - P(\lambda) = \lambda^n = \lambda \times \lambda^{n-1},$$

car $P(\lambda) = \chi_{C_P}(\lambda) = 0$. Ainsi $C_P^T V_\lambda = \lambda V_\lambda$ avec $V_\lambda \neq 0$ (**première coordonnée égale à 1**).

- c. Une matrice est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres vaut n . D'après b), chaque sous-espace propre est de dimension 1 : cette somme est donc le nombre de valeurs propres distinctes de C_P dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire le nombre de racines distinctes de P dans $\mathbb{K}$. Or P , de degré n , a n racines distinctes dans $\mathbb{K}$ exactement quand il est scindé à racines simples.

Donc C_P est diagonalisable si et seulement si P est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$.

d. Puisque $C_P e_k = e_{k+1}$ pour $k \leq n-1$, une récurrence immédiate donne $C_P^k e_1 = e_{k+1}$ pour $0 \leq k \leq n-1$.

Soit $Q = \sum_{k=0}^{n-1} q_k X^k$ tel que $Q(C_P) = 0$. Alors $0 = Q(C_P) e_1 = \sum_{k=0}^{n-1} q_k e_{k+1}$.

La base canonique étant libre, tous les q_k sont nuls. Le polynôme minimal est donc de degré au moins n . D'après le théorème de Cayley-Hamilton, μ_{C_P} divise χ_{C_P} , qui est de degré n . Les deux polynômes sont unitaires et de même degré.

Conclusion : $\mu_{C_P} = \chi_{C_P} = P$.

Barème : a) 0,5 point pour l'effet de l'opération sur les colonnes, 0,5 point pour la dernière colonne, 0,5 point pour le développement et le signe ; b) 0,75 point pour le rang, 0,75 point pour le vecteur propre de la transposée ; c) 1 point (critère par les dimensions cité) ; d) 0,25 point pour les puissances, 0,5 point pour la liberté, 0,25 point pour Cayley-Hamilton et la conclusion.

Erreur fréquente : affirmer que $\mu = \chi$ « car les valeurs propres sont simples » ; ici les racines de P peuvent être multiples, et c'est le vecteur e_1 qui fait tout le travail.

Exercice 2 : Partie II : trigonalisation d'un exemple (5 points)

a. On développe : $P = (X^2 - 2X + 1)(X - 2) = X^3 - 4X^2 + 5X - 2$. Donc $a_0 = -2$, $a_1 = 5$, $a_2 = -4$, et :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -5 & \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

D'après la partie I, $\chi_C = P$ et 1 est valeur propre de multiplicité 2, alors que $\dim E_1(C) = 1$ d'après I b). **La dimension du sous-espace propre est strictement inférieure à la multiplicité : C n'est pas diagonalisable.** (On peut aussi invoquer I c), puisque P a une racine double.)

- b. L'égalité $CQ = QT$ équivaut, colonne par colonne, à $C v_1 = v_1$, $C v_2 = v_1 + v_2$ et $C v_3 = 2 v_3$.

On résout d'abord $(C - I_3) v = 0$, avec $C - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. La première ligne donne $x = 2z$, la troisième $y = -3z$, et la deuxième est alors vérifiée : $2z + 3z - 5z = 0$. On prend $v_1 = (2, -3, 1)^T$.

Ensuite, $(C - 2I_3) v = 0$ donne $-2x + 2z = 0$ et $y + 2z = 0$, soit $x = z$ et $y = -2z$; la ligne $x - 2y - 5z = z + 4z - 5z = 0$ est vérifiée. On prend $v_3 = (1, -2, 1)^T$.

Enfin, on cherche v_2 tel que $(C - I_3) v_2 = v_1$. Avec $z = 0$, la première ligne donne $-x = 2$, donc $x = -2$, et la troisième $y = 1$. La deuxième ligne vaut alors $-2 - 1 = -3$: elle est vérifiée. Ainsi $v_2 = (-2, 1, 0)^T$. Vérification : $C v_2 = (0, -2, 1)^T = v_1 + v_2$.

La matrice $Q = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -3 & -2 & \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a pour déterminant $2 \times 1 + 2 \times (-3 + 2) + 1 \times (-1) = -1 \neq 0$.

Donc Q est inversible et $Q^{-1} C Q = T$.

c. Le polynôme P est de degré 3, donc $X^k = P S_k + R_k$ avec $\deg R_k \leq 2$. On écrit $R_k = \alpha (X - 1)^2 + \beta (X - 1) + \gamma$.

En évaluant en 1 : $R_k(1) = 1$, donc $\gamma = 1$. En dérivant, $k X^{k-1} = P' S_k + P S'_k + R'_k$; or 1 est racine double de P , donc $P(1) = P'(1) = 0$, d'où $R'_k(1) = k$, c'est-à-dire $\beta = k$. En évaluant en 2 : $2^k = \alpha + k + 1$, donc $\alpha = 2^k - k - 1$.

$$R_k = (2^k - k - 1)(X - 1)^2 + k(X - 1) + 1.$$

L'application $Q \rightarrow Q(C)$ est un morphisme d'algèbres, donc $C^k = P(C) S_k(C) + R_k(C)$. Par le théorème de Cayley-Hamilton, $P(C) = \chi_C(C) = 0$.

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $C^k = (2^k - k - 1)(C - I_3)^2 + k(C - I_3) + I_3$.

Contrôle : pour $k = 0$ et $k = 1$, on retrouve I_3 et C ; pour $k = 2$, on obtient $(C - I_3)^2 + 2(C - I_3) + I_3 = C^2$.

Barème : a) 0,5 point pour la matrice, 0,5 point pour la justification ; b) 0,5 point par vecteur, 0,5 point pour l'inversibilité de Q ; c) 1 point pour le reste (dérivation justifiée), 0,5 point pour Cayley-Hamilton, 0,5 point pour l'expression de C^k .

Exercice 3 : Partie III : l'endomorphisme de multiplication à gauche (5 points)

- a. Par récurrence, $\varphi_A^k(M) = A^k M$ pour tout $k \in \mathbb{N}$: c'est vrai pour $k = 0$, et $\varphi_A^{k+1}(M) = A(\varphi_A^k(M)) = A^{k+1}M$. Pour $Q = \sum_k q_k X^k$, on a par linéarité $Q(\varphi_A)(M) = \sum_k q_k A^k M = Q(A)M$.

Si $Q(A) = 0$, alors $Q(\varphi_A)(M) = 0$ pour tout M , donc $Q(\varphi_A) = 0$. Réciproquement, si $Q(\varphi_A) = 0$, alors $Q(A) = Q(A)I_n = Q(\varphi_A)(I_n) = 0$. Les idéaux annulateurs de A et de φ_A sont donc égaux. **Leur générateur unitaire est le même** : $\mu_{\varphi_A} = \mu_A$.

- b. Un endomorphisme en dimension finie est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples. Comme $\mu_{\varphi_A} = \mu_A$, **φ_A est diagonalisable si et seulement si A l'est.**

- c. Les valeurs propres sont les racines du polynôme minimal, donc $\text{Sp}(\varphi_A) = \text{Sp}(A)$. Soit λ une valeur propre et M de colonnes $M_1, \dots, M_n$. La j -ième colonne de AM est AM_j , donc $AM = \lambda M$ si et seulement si $AM_j = \lambda M_j$ pour tout j .

Le sous-espace propre de φ_A pour λ est l'ensemble des matrices dont toutes les colonnes sont dans $\ker(A - \lambda I_n)$. L'application $M \rightarrow (M_1, \dots, M_n)$ en est un isomorphisme sur $\ker(A - \lambda I_n)^n$, d'où la dimension $n \dim \ker(A - \lambda I_n)$.

- d. Pour tous i, j , $AE_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ki} E_{kj}$: l'image de E_{ij} reste dans $\text{Vect}(E_{1j}, \dots, E_{nj})$, et ses coordonnées sont celles de la i -ième colonne de A . Dans la base proposée, la matrice de φ_A est donc diagonale par blocs :

$$\text{Mat}(\varphi_A) = \begin{pmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A \end{pmatrix}.$$

Le déterminant d'une matrice diagonale par blocs est le produit des déterminants des blocs. **Ainsi**

$$\chi_{\varphi_A} = \det(X I_n - A)^n = (\chi_A)^n.$$

Barème : a) 0,5 point pour la formule, 1 point pour l'égalité des idéaux et du polynôme minimal ; b) 1 point (critère cité) ; c) 0,5 point pour le spectre, 0,5 point pour la description, 0,5 point pour la dimension ; d) 0,5 point pour la matrice par blocs, 0,5 point pour le polynôme caractéristique.

Exercice 4 : Partie IV : lemme des noyaux et commutant (5 points)

a. D'après III a) et I d), $\mu_{\varphi} = \mu_C = P$. D'après III d) et I a), $\chi_{\varphi} = P^3$.

$$\text{Donc } \mu_{\varphi} = (X - 1)^2 (X - 2) \text{ et } \chi_{\varphi} = (X - 1)^6 (X - 2)^3.$$

b. Le polynôme minimal de φ a une racine double : il n'est pas à racines simples, donc φ **n'est pas diagonalisable** (c'est aussi III b) avec II a)). D'après III c) et I b), $\dim E_1(\varphi) = 3 \times 1 = 3$ et $\dim E_2(\varphi) = 3 \times 1 = 3$. **Les deux sous-espaces propres sont de dimension 3**, et $3 + 3 = 6 < 9$ confirme la non-diagonalisabilité.

c. Le polynôme $P = (X - 1)^2 (X - 2)$ annule φ , et $(X - 1)^2$ et $X - 2$ sont premiers entre eux. Le lemme de décomposition des noyaux donne donc $\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = \ker P(\varphi) = \ker(\varphi - \text{id})^2 \oplus \ker(\varphi - 2 \text{id})$.

On calcule :

$$(C - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & -8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de rang 1, et son noyau est le plan $\Pi : x + 2y + 4z = 0$, qui contient v_1 et v_2 . D'après III a), $(\varphi - \text{id})^2(M) = (C - I_3)^2 M$.

Donc $\ker(\varphi - \text{id})^2$ est l'ensemble des matrices dont les trois colonnes sont dans Π : il est de dimension $3 \times 2 = 6$. De même, $\ker(\varphi - 2\text{id})$ est l'ensemble des matrices dont chaque colonne est colinéaire à $v_3 = (1, -2, 1)^T$: il est de dimension 3. On vérifie que $6 + 3 = 9 = \dim \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

d. Toute matrice de $\mathbb{R}[C]$ commute avec C , donc $\mathbb{R}[C] \subset \mathcal{C}(C)$.

Réciproquement, soit M telle que $CM = MC$. La famille $(e_1, Ce_1, C^2e_1) = (e_1, e_2, e_3)$ est une base (I d)). Il existe donc des réels c_0, c_1, c_2 tels que $Me_1 = c_0e_1 + c_1Ce_1 + c_2C^2e_1$. Posons $R = c_0I_3 + c_1C + c_2C^2$, de sorte que $Me_1 = Re_1$.

Pour $j \in \{0, 1, 2\}$, comme M et R commutent avec C ,
 $MC^j e_1 = C^j Me_1 = C^j Re_1 = RC^j e_1$. Les endomorphismes associés à M et R coïncident sur une base, donc $M = R \in \mathbb{R}[C]$.

Enfin, $\dim \mathbb{R}[C] = \deg \mu_C = 3$, une base étant (I_3, C, C^2) . **Le commutant de C est $\mathbb{R}[C]$, de dimension 3.**

Barème : a) 0,5 point par polynôme ; b) 0,5 point pour la non-diagonalisabilité, 0,5 point pour les dimensions ; c) 0,5 point pour le lemme des noyaux (hypothèse de coprimauté citée), 0,5 point pour $(C - I_3)^2$, 0,5 point pour la description des deux sous-espaces ; d) 0,25 point pour l'inclusion directe, 1 point pour la réciproque, 0,25 point pour la dimension.

Après le corrigé du contrôle : DS de réduction des endomorphismes

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Éléments propres](#) » en maths spé et « [Diagonalisation et trigonalisation](#) » en maths spé et « [Polynômes d'endomorphismes](#) » en maths spé puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [éléments propres](#), [diagonalisation et trigonalisation](#), [polynômes d'endomorphismes](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths spé classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths spé sur ce thème

- [Contrôle de maths spé : éléments propres et polynôme caractéristique](#)
- [Contrôle de maths spé : diagonalisation, trigonalisation et nilpotents](#)
- [Contrôle de maths spé : polynôme minimal, noyaux et Cayley-Hamilton](#)