Corrigé du contrôle de maths spé : différentielle et règle de la chaîne

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours	4 points
Exercice 2 : Différentielles d'applications matricielles	5 points
Exercice 3 : Gradients	3 points
Exercice 4 : Règle de la chaîne en coordonnées polaires	3 points
Exercice 5 : Problème : fonctions constantes et espace tangent	5 points
Total	**20 points**

Exercice 1 : Question de cours (4 points)

a. **Définition.** L'application f est différentiable en a s'il existe une application linéaire $L \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $f(a+h) = f(a) + L(h) + o(|h|)$ quand $h \to 0$. Cette application L est alors unique : on la note $df(a)$.

Dérivée selon un vecteur. Soit $v \in E$ non nul. Pour $t \neq 0$ assez petit, $a + tv \in U$, car U est ouvert. On écrit alors

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$$\frac{f(a+tv)-f(a)}{t} = df(a)(v) + \frac{o(|tv|)}{t} \quad [\, t \to 0 \,] \quad df(a)(v),$$

car $\left\| \frac{o(|tv|)}{t} \right\| = |v| \times \frac{|o(|tv|)|}{|tv|} \to 0$. **Donc** $D_v f(a)$ **existe et vaut** $df(a)(v)$; le cas $v = 0$ est immédiat.

Dérivées partielles. Si $E = \mathbb{R}^n$ de base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$, alors $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = De_j\, f(a) = df(a)(e_j)$. Par linéarité, pour $h = \sum h_j e_j$, on obtient $df(a)(h) = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

b. **Continuité.** Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a $x^2 \leq x^2 + y^2$, donc $|f(x,y)| \leq |y|$, qui tend vers 0. **La fonction** f **est continue en** $(0,0)$ **.**

Dérivées selon un vecteur. Soit $v = (p,q) \neq (0,0)$ et $t \neq 0$. Alors $\frac{f(tv)-f(0,0)}{t} = \frac{t^3\, p^2\, q}{t \times t^2\,(p^2+q^2)} = \frac{p^2\, q}{p^2+q^2}$. Ce quotient ne dépend pas de t : $D_v f(0,0)$ **existe et vaut** $\frac{p^2\, q}{p^2+q^2}$.

Non-différentiabilité. Supposons f différentiable en $(0,0)$. Alors, d'après a, $v \to D_v f(0,0)$ serait linéaire. Or $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = D_{(1,0)} f(0,0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = D_{(0,1)} f(0,0) = 0$. On aurait donc $df(0,0) = 0$, ce qui est contredit par $D_{(1,1)} f(0,0) = \frac{1}{2} \neq 0$. **Ainsi** f **n'est pas différentiable en** $(0,0)$ **.**

Barème : a) 0,5 point pour la définition, 1 point pour la dérivée selon un vecteur, 0,5 point pour la formule avec les dérivées partielles ; b) 0,5 point pour la continuité, 0,75 point pour les dérivées directionnelles, 0,75 point pour la non-différentiabilité.

Exercice 2 : Différentielles d'applications matricielles (5 points)

a. Pour $M, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $(M+H)^2 = M^2 + MH + HM + H^2$. L'application $H \to MH + HM$ est linéaire. De plus, $|H^2| \leq |H|^2$, donc $H^2 = o(|H|)$. **Ainsi f est différentiable en tout M, avec $df(M)(H) = MH + HM$.** Attention : ce n'est pas $2MH$ en général, car M et H ne commutent pas.

b. D'après la formule $\det M = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} m_{\sigma(j)\, j}$, le déterminant est une fonction polynomiale des n^2 coefficients. Ses dérivées partielles existent et sont polynomiales, donc continues. **Par conséquent, $\det$ est de classe $\mathcal{C}^1$.**

Le développement selon la ligne i s'écrit $\det M = \sum_{k=1}^{n} m_{ik}\, C_{ik}$, où le cofacteur C_{ik} ne dépend pas des coefficients de la ligne i. Donc $\frac{\partial \det}{\partial m_{ij}}(M) = C_{ij}$. D'après l'exercice 1,

$$d\det(M)(H) = \sum_{i,\, j} C_{ij}\, h_{ij} = \operatorname{tr}\big({}^t\mathrm{Com}(M)\; H\big),$$

car le coefficient diagonal (j, j) de ${}^t\mathrm{Com}(M)\, H$ vaut $\sum_i C_{ij}\, h_{ij}$. En particulier, $\mathrm{Com}(I_n) = I_n$, d'où $d\det(I_n)(H) = \operatorname{tr}(H)$. Si M est inversible, ${}^t\mathrm{Com}(M) = \det(M)\, M^{-1}$, d'où $d\det(M)(H) = \det(M)\operatorname{tr}(M^{-1} H)$.

c. On a $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$, image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ par l'application continue $\det$. **C'est donc un ouvert.** Ainsi $M + H$ est inversible pour H assez petite.

Posons $X = (M+H)^{-1}$. On a
$M^{-1} - X = M^{-1}(M+H)\, X - M^{-1}\, M\, X = M^{-1}\, H\, X$, donc

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$X = M^{-1} - M^{-1} H X$. En remplaçant X par cette expression dans le dernier terme, on obtient

$$X = M^{-1} - M^{-1} H \left(M^{-1} - M^{-1} H X\right) = M^{-1} - M^{-1} H M^{-1} + M^{-1} H M^{-1} H X.$$

Le reste $R(H) = M^{-1} H M^{-1} H (M+H)^{-1}$ vérifie $|R(H)| \leq |M^{-1}|^2 |H|^2 \left|(M+H)^{-1}\right|$. Or l'inversion est continue sur $GL_n(\mathbb{R})$, puisque $M^{-1} = \frac{1}{\det M} {}^t\mathrm{Com}(M)$ est une fraction rationnelle des coefficients. Donc $\left|(M+H)^{-1}\right|$ reste borné au voisinage de 0, et $R(H) = o(|H|)$.

Enfin, $H \to -M^{-1} H M^{-1}$ est linéaire. **Donc** inv **est différentiable en** M **, et** $d\mathrm{inv}(M)(H) = -M^{-1} H M^{-1}$ **.**

Erreur fréquente : écrire $d\mathrm{inv}(M)(H) = -M^{-2} H$ par analogie avec la dérivée de $\frac{1}{x}$; le produit matriciel n'est pas commutatif.

Barème : a) 1 point ; b) 0,5 point pour la classe C1, 0,5 point pour la dérivée partielle, 0,5 point pour la trace, 0,5 point pour les deux cas particuliers ; c) 0,5 point pour l'ouverture, 0,5 point pour l'égalité, 1 point pour le contrôle du reste et la conclusion.

Exercice 3 : Gradients (3 points)

a. On a $\varphi = \mathrm{tr} \circ f$, où tr est linéaire. D'après l'exercice 2, $d\varphi(M)(H) = \mathrm{tr}(MH + HM) = 2\mathrm{tr}(MH)$. Or $\mathrm{tr}(MH) = \mathrm{tr}\left({}^t({}^t M) H\right) = \langle {}^t M, H \rangle$. **Donc** $\nabla \varphi(M) = 2\, {}^t M$ **.**

b. D'après l'exercice 2, $d\det(M)(H) = \mathrm{tr}\big({}^t\mathrm{Com}(M)\,H\big) = \langle\, \mathrm{Com}(M), H\,\rangle$. **Donc** $\nabla \det(M) = \mathrm{Com}(M)$; pour M inversible, c'est $\det(M)\,{}^t(M^{-1})$.

c. Soit $q(x) = \langle\, x, x\,\rangle$. Comme $q(x+h) = q(x) + 2\langle\, x, h\,\rangle + |h|^2$, on a $dq(x)(h) = 2\langle\, x, h\,\rangle$. Sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, q est à valeurs dans $]0, +\infty[$, où la racine carrée est dérivable. Par la règle de la chaîne,

$$dN(x)(h) = \frac{1}{2\sqrt{q(x)}} \times 2\langle\, x, h\,\rangle = \left\langle \frac{x}{|x|}, h \right\rangle.$$

Donc $\nabla N(x) = \frac{x}{|x|}$, le vecteur unitaire qui dirige x.

Barème : a) 0,5 point pour la différentielle, 0,5 point pour l'identification du gradient ; b) 1 point ; c) 0,5 point pour dq, 0,5 point pour la règle de la chaîne et le gradient.

Exercice 4 : Règle de la chaîne en coordonnées polaires (3 points)

a. La fonction $g = f \circ \Phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V, comme composée. Par la règle de la chaîne, les dérivées de f étant prises en $\Phi(r, \theta)$, on a

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \cos\theta\, \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\, \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = -r\sin\theta\, \frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\, \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

b. En multipliant la première égalité par r, on obtient $r\frac{\partial g}{\partial r} = r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial x} + r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}$.
Comme $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, cela vaut $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$.

c. Comme Φ est une bijection de V sur U, f est solution si et seulement si $r\frac{\partial g}{\partial r} = 0$ sur V. Puisque $r > 0$, cela équivaut à $\frac{\partial g}{\partial r} = 0$ sur V.

Pour θ fixé, $r \to g(r,\theta)$ a alors une dérivée nulle sur l'intervalle $]0, +\infty[$: elle est constante. Donc $g(r,\theta) = h(\theta)$, avec $h(\theta) = g(1,\theta)$ de classe $\mathcal{C}^1$. Par conséquent, $f(x,y) = h\left(\arctan\frac{y}{x}\right) = \psi\left(\frac{y}{x}\right)$, avec $\psi = h \circ \arctan$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Réciproquement, si $f(x,y) = \psi\left(\frac{y}{x}\right)$ avec ψ de classe $\mathcal{C}^1$, alors $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}\psi'\left(\frac{y}{x}\right)$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x}\psi'\left(\frac{y}{x}\right)$. Ainsi $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{x}\psi' + \frac{y}{x}\psi' = 0$.

Les solutions sont les fonctions $(x,y) \to \psi\left(\frac{y}{x}\right)$, avec ψ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$: ce sont les fonctions constantes sur chaque demi-droite issue de l'origine.

Barème : a) 0,5 point par dérivée partielle ; b) 0,5 point ; c) 0,5 point pour la réduction à la dérivée en r, 0,5 point pour l'intégration, 0,5 point pour la forme finale et la réciproque.

Exercice 5 : Problème : fonctions constantes et espace tangent (5 points)

Fonctions de différentielle nulle

a. L'arc $\alpha : t \to a + t(b-a)$ est dérivable, de dérivée $b - a$, et prend ses valeurs dans

$[a,b] \subset U$. Par la règle de la chaîne (dérivée le long d'un arc), $\varphi = f \circ \alpha$ est dérivable sur $[0,1]$ et $\varphi'(t) = df\big(a + t(b-a)\big)(b-a)$.

Soit B une boule ouverte incluse dans U , sur laquelle $df = 0$. Une boule est convexe : pour $a, b \in B$, le segment $[a,b]$ est inclus dans B . Alors $\varphi' = 0$ sur $[0,1]$, donc φ est constante et $f(b) = \varphi(1) = \varphi(0) = f(a)$. **Ainsi f est constante sur B .**

b. Posons $T = \{t \in [0,1] : f(\gamma(t))) = f(a)\}$. Cet ensemble contient 0 ; il est fermé, car $f \circ \gamma$ est continue (f différentiable est continue). Donc $s = \sup T$ appartient à T .

Comme U est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(\gamma(s), r) \subset U$. D'après a, f est constante sur cette boule, égale à $f(\gamma(s)) = f(a)$. Par continuité de γ en s , il existe $\delta > 0$ tel que $\gamma(t) \in B(\gamma(s), r)$ pour tout $t \in [0,1]$ vérifiant $|t - s| \leq \delta$. Tous ces t sont donc dans T .

Si l'on avait $s < 1$, le réel $\min(s + \delta, 1)$ serait un élément de T strictement supérieur à s : c'est absurde. Donc $s = 1$ et $1 \in T$. **Ainsi $f(x) = f(\gamma(1)) = f(a)$: f est constante sur U .**

c. Soit $U = \{(x,y) \in [\backslash\text{thbb?}]R^2 : x \neq 0,0\}$, réunion de deux demi-plans ouverts, et $f(x,y) = 1$ si $x > 0$, $f(x,y) = -1$ si $x < 0$. La fonction f est constante au voisinage de chaque point, donc $df = 0$ sur U . **Pourtant f n'est pas constante : U n'est pas connexe par arcs.**

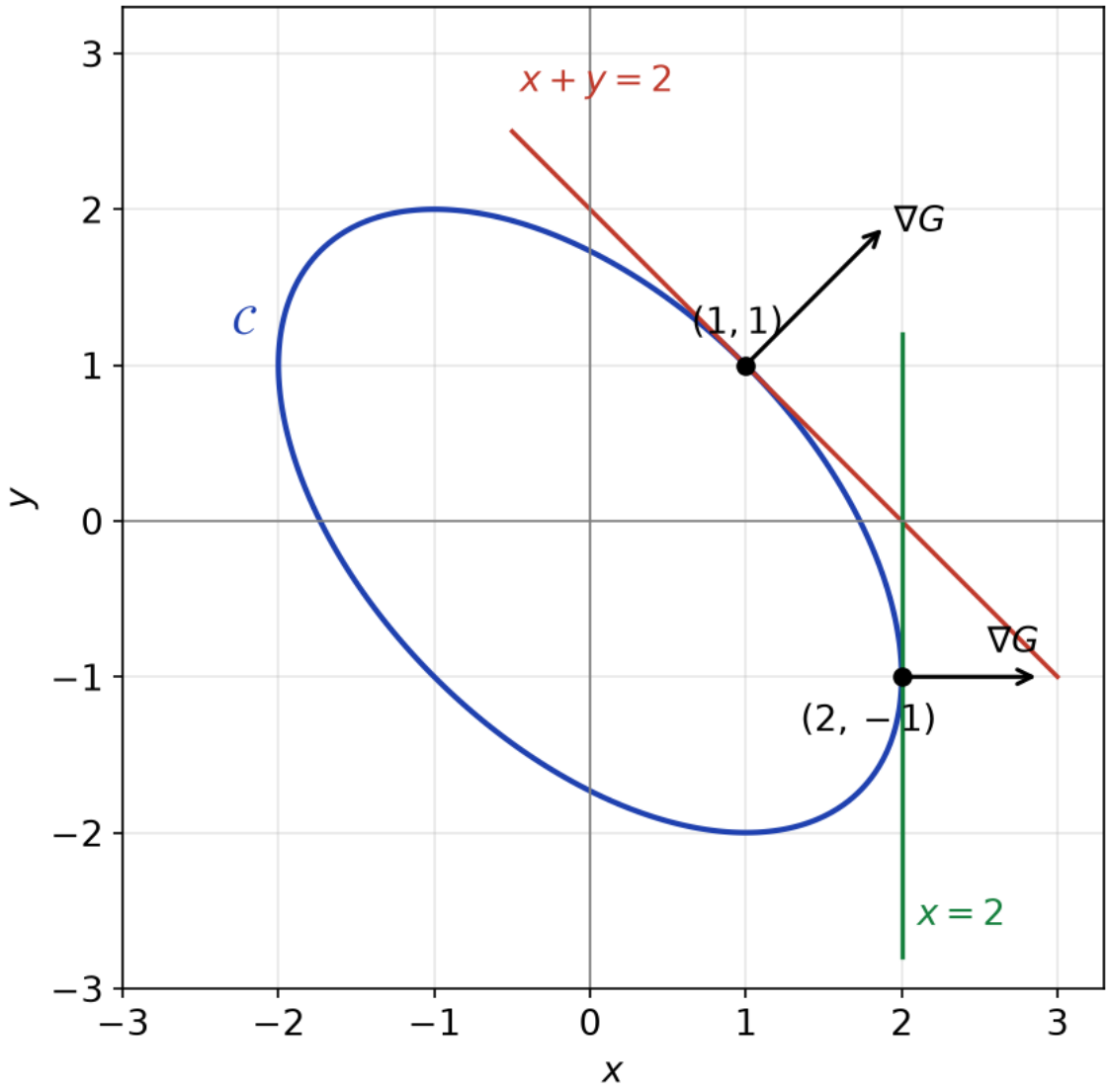
Tangentes et plan tangent

d. Posons $G(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3$. On a $G(1,1) = 1 + 1 + 1 - 3 = 0$ et $G(2,-1) = 4 - 2 + 1 - 3 = 0$: les deux points sont sur $\mathcal{C}$. De plus, $\nabla G(x,y) = (2x + y, x + 2y)$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

En $(1,1)$, $\nabla G = (3,3) \neq 0$. La tangente est $(1,1) + \ker dG(1,1)$, soit $3(x-1)+3(y-1)=0$. **Tangente en $(1,1)$: $x+y=2$.**

En $(2,-1)$, $\nabla G = (3,0) \neq 0$. La tangente a pour équation $3(x-2)=0$. **Tangente en $(2,-1)$: la droite verticale $x=2$.**



e. Posons $K(x,y,z) = x^2+y^2-z^2-1$. On a $K(1,1,1)=0$ et $\nabla K(1,1,1) = (2,2,-2) \neq 0$. Le plan tangent est $(1,1,1) + \ker dK(1,1,1)$: $2(x-1)+2(y-1)-2(z-1)=0$. **Plan tangent : $x+y-z=1$.**

Barème : a) 0,5 point pour φ prime, 0,5 point pour la constance sur une boule (convexité) ; b) 0,5 point pour s dans T, 0,5 point pour la boule autour de γ(s), 0,5 point pour la contradiction ; c) 0,5 point ; d) 0,25 point pour l'appartenance, 0,75 point pour les deux tangentes ; e) 1 point.

Revenir à l'énoncé du contrôle

Après le corrigé du contrôle : différentielle et règle de la chaîne

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « Calcul différentiel » en maths spé puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** calcul différentiel.

Retrouvez tous les **contrôles de maths spé** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.