

Corrigé du contrôle de maths spé : diagonalisation, trigonalisation et nilpotents

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours	3 points
Exercice 2 : Diagonalisation et puissances	5 points
Exercice 3 : Trigonalisation d'une matrice	4 points
Exercice 4 : Matrices nilpotentes	3 points
Exercice 5 : Matrices de rang 1	5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours (3 points)

- a. **Critère.** L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et, pour toute valeur propre λ , $\dim E_\lambda(u) = m(\lambda)$.
- b. *Sens direct.* Supposons u diagonalisable. Dans une base de vecteurs propres, la matrice de u est diagonale ; chaque valeur propre λ y figure $d_\lambda = \dim E_\lambda(u)$ fois. Le déterminant d'une matrice diagonale donne alors

$$\chi_u = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)^{d_\lambda}.$$

Ce polynôme est scindé, et la multiplicité de λ vaut $m(\lambda) = d_\lambda = \dim E_\lambda(u)$.

Réciproque. Supposons χ_u scindé et $\dim E_\lambda(u) = m(\lambda)$ pour tout λ . Comme χ_u est scindé de degré n , la somme des multiplicités vaut n . Ainsi

$\sum_\lambda \dim E_\lambda(u) = \sum_\lambda m(\lambda) = n$. Or les sous-espaces propres sont en somme directe, donc leur somme est de dimension n : elle est égale à E . En juxtaposant des bases de chaque $E_\lambda(u)$, on obtient une base de E formée de vecteurs propres. **Donc u est diagonalisable, et le critère est démontré.**

Barème : a) 1 point ; b) 2 points : 1 pour le sens direct, 1 pour la réciproque (somme des multiplicités, somme directe, base de vecteurs propres).

Exercice 2 : Diagonalisation et puissances (5 points)

a. On développe selon la première colonne :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-2 & 1 & 0 \\ 0 & X-1 & 0 \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X-2) \begin{vmatrix} X-1 & 0 \\ -1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-2)^2(X-1).$$

Ainsi $\chi_A = (X-1)(X-2)^2$ et $\text{Sp}(A) = \{1, 2\}$, avec 1 simple et 2 double.

b. Pour E_1 , le système $(A - I_3)X = 0$ s'écrit $x + y - z = 0$, $y = 0$, $y = 0$. On obtient $y = 0$ et $z = x$: $E_1 = \text{Vect}((1, 0, 1))$.

Pour E_2 , la matrice $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est de rang 1 et donne la seule équation $y = z$. Donc $E_2 = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 1))$, de dimension 2.

Le polynôme χ_A est scindé et $\dim E_1 = 1 = m(1)$, $\dim E_2 = 2 = m(2)$. D'après le critère de l'exercice 1, **A est diagonalisable.**

Les colonnes de P sont $(1, 0, 1) \in E_1$, puis $(1, 1, 1) = (1, 0, 0) + (0, 1, 1) \in E_2$ et $(0, 1, 1) \in E_2$. Vérification : $A(1, 1, 1) = (2, 2, 2)$ et $A(0, 1, 1) = (0, 2, 2)$. Enfin, $\det P = 1 \neq 0$ (calcul ci-dessous), donc ces trois vecteurs forment une base. **Ainsi**
 $P^{-1}AP = \text{diag}(1, 2, 2)$.

c. Par la méthode des cofacteurs, avec $\det P = 1 \times (1 - 1) - 1 \times (0 - 1) + 0 = 1$, on trouve

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérification : le produit PP^{-1} redonne bien I_3 , ligne par ligne. **C'est l'inverse cherché.**

d. Posons $\Delta = \text{diag}(1, 2, 2)$. Comme $A = P\Delta P^{-1}$, une récurrence immédiate donne $A^n = P\Delta^n P^{-1}$, avec $\Delta^n = \text{diag}(1, 2^n, 2^n)$. D'abord,

$$P\Delta^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n & 0 \\ 0 & 2^n & 2^n \\ 1 & 2^n & 2^n \end{pmatrix}.$$

Puis, en multipliant par P^{-1} ,

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 & 1 - 2^n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 2^n - 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérification : pour $n = 0$, on retrouve I_3 ; pour $n = 1$, on retrouve A . **Cette formule donne A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.**

e. En posant $X_n = (x_n, y_n, z_n)$, on a $X_{n+1} = AX_n$, donc $X_n = A^n X_0$. Comme $X_0 = (0, 1, 0)$, le vecteur X_n est la deuxième colonne de A^n . **Donc** $x_n = 2^n - 1$, $y_n = 2^n$ **et** $z_n = 2^n - 1$.

Barème : a) 1 point ; b) 1,5 point : 0,5 pour E_1 , 0,5 pour E_2 , 0,5 pour la diagonalisabilité et la matrice diagonale ; c) 0,5 point ; d) 1,5 point : 0,5 pour $A^n = P\Delta^n P^{-1}$, 1 pour le calcul ; e) 0,5 point.

Exercice 3 : Trigonalisation d'une matrice (4 points)

a. On développe selon la troisième colonne :

$$\chi_B = \begin{vmatrix} X-1 & X-1 & 0 \\ 1 & 1 & X-2 \\ -1 & 1 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2)((X-1)(X-3)+1) = (X-2)(X^2-4X+4).$$

Donc $\chi_B = (X-2)^3$ et $\text{Sp}(B) = \{2\}$, valeur propre triple.

b. On a $B - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice est de rang 1, et son noyau est donné par $x = y$. **Donc** $E_2(B) = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 0, 1))$, de dimension 2. Comme $\dim E_2(B) = 2 \neq 3 = m(2)$, **B n'est pas diagonalisable**. On peut aussi dire : si B était diagonalisable avec 2 pour seule valeur propre, elle serait égale à $2I_3$.

c. Le polynôme χ_B est scindé, donc B est trigonalisable. Posons $e = (1, 1, 0)$, $f = (0, 0, 1)$ et complétons par $w = (1, 0, 0)$. Alors $(B - 2I_3)w = (-1, -1, 1) = -e + f$, c'est-à-dire $Bw = -e + f + 2w$. La famille (e, f, w) est une base, car la matrice P ci-dessous a pour déterminant $1 \neq 0$. On obtient

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $B = PTP^{-1}$, avec T triangulaire supérieure.

d. Le calcul donne $N^2 = 0$: chaque ligne de N est proportionnelle à $(1, -1, 0)$, et chaque colonne de N est orthogonale à ce vecteur ou nulle. Comme $2I_3$ et N commutent, la formule du binôme donne, pour $n \geq 1$, $B^n = (2I_3 + N)^n = 2^n I_3 + n2^{n-1}N$. **Donc**

$$B^n = \begin{pmatrix} 2^n - n2^{n-1} & n2^{n-1} & 0 \\ -n2^{n-1} & 2^n + n2^{n-1} & 0 \\ n2^{n-1} & -n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}.$$

Pour $n = 1$, on retrouve bien B .

Barème : a) 1 point ; b) 1 point : 0,5 pour le sous-espace propre, 0,5 pour la non-diagonalisabilité ; c) 1,5 point : 0,5 pour le choix de w , 0,5 pour le calcul de Bw , 0,5 pour P et T ; d) 0,5 point.

Erreur fréquente : choisir comme troisième vecteur un vecteur de $E_2(B)$, ce qui ne donne pas une base.

Exercice 4 : Matrices nilpotentes (3 points)

- a. Soit λ une valeur propre complexe de N et $x \neq 0$ tel que $Nx = \lambda x$. Alors $N^p x = \lambda^p x$. Or $N^p = 0$, donc $\lambda^p x = 0$, puis $\lambda = 0$. Par ailleurs, N n'est pas inversible, car $\det(N)^p = \det(N^p) = 0$. Ainsi 0 est bien valeur propre : $\text{Sp}(N) = \{0\}$.

Sur $\mathbb{C}$, le polynôme χ_N est scindé, unitaire de degré n , et sa seule racine est 0. **Donc** $\chi_N = X^n$.

- b. Supposons $\sum_{k=0}^{p-1} a_k N^k x = 0$ avec des a_k non tous nuls. Soit j le plus petit indice tel que $a_j \neq 0$. Appliquons N^{p-1-j} : les termes d'indice $k > j$ font apparaître $N^{k+p-1-j}$, nulle car $k + p - 1 - j \geq p$. Il reste $a_j N^{p-1} x = 0$, donc $a_j = 0$, ce qui est contradictoire. **La famille est libre.** Elle compte p vecteurs de $\mathbb{C}^n$, donc $p \leq n$.
- c. Pour $k \geq 1$, la matrice N^k est nilpotente, car $(N^k)^p = (N^p)^k = 0$. D'après a), $\chi_{N^k} = X^n$. Le coefficient de X^{n-1} , égal à $-\text{tr}(N^k)$, est donc nul. **Ainsi** $\text{tr}(N^k) = 0$.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour les valeurs propres nulles, 0,5 pour l'existence de la valeur propre 0, 0,5 pour χ_N ; b) 1 point : 0,5 pour la liberté, 0,5 pour $p \leq n$; c) 0,5 point.

Exercice 5 : Matrices de rang 1 (5 points)

- a. L'image de A est une droite ; soit U une colonne non nulle qui l'engendre. Chaque colonne C_j de A appartient à cette droite : $C_j = v_j U$ pour un réel v_j . En posant $V = (v_1, \dots, v_n)^T$, le coefficient (i, j) de A vaut $u_i v_j$, c'est-à-dire que $A = UV^T$. Enfin, $V \neq 0$, car $A \neq 0$. **Il existe donc U et V non nulles telles que $A = UV^T$.**
- b. Le produit $V^T U$ est la matrice 1×1 de coefficient $\sum_i u_i v_i$. Or les coefficients diagonaux

de A sont les $u_i v_i$, donc $V^T U = \text{tr}(A)$. Par associativité,
 $A^2 = U(V^T U)V^T = \text{tr}(A)UV^T$. **Donc** $A^2 = \text{tr}(A)A$.

- c. Par le théorème du rang, $\dim \ker A = n - 1 \geq 1$: 0 est valeur propre et $\dim E_0(A) = n - 1$. De plus, $AU = U(V^T U) = \text{tr}(A)U$ avec $U \neq 0$: **U est vecteur propre pour $\text{tr}(A)$** .

Si $\text{tr}(A) \neq 0$, les multiplicités vérifient $m(0) \geq \dim E_0(A) = n - 1$ et $m(\text{tr } A) \geq 1$. Leur somme ne dépasse pas $n = \deg \chi_A$, donc les deux inégalités sont des égalités, et $\chi_A = X^{n-1}(X - \text{tr } A)$.

Si $\text{tr}(A) = 0$, alors $A^2 = 0$: A est nilpotente et $\chi_A = X^n$ d'après l'exercice 4, ce qui est encore $X^{n-1}(X - \text{tr } A)$.

Dans tous les cas, $\chi_A = X^{n-1}(X - \text{tr}(A))$.

- d. Si $\text{tr}(A) \neq 0$, χ_A est scindé et $\dim E_0 = n - 1 = m(0)$,
 $\dim E_{\text{tr } A} = 1 = m(\text{tr } A)$: A est diagonalisable d'après le critère. Si $\text{tr}(A) = 0$, la seule valeur propre est 0 ; une matrice diagonalisable serait alors semblable à la matrice nulle, donc nulle, ce qui contredit $\text{rg } A = 1$. **Ainsi A est diagonalisable si et seulement si $\text{tr}(A) \neq 0$.**
- e. Les lignes de C sont proportionnelles à $(1, 2, 3)$ et $C \neq 0$, donc $\text{rg } C = 1$. De plus $\text{tr } C = 1 + 4 - 3 = 2 \neq 0$. **C est diagonalisable, avec $\chi_C = X^2(X - 2)$.** De même, D est de rang 1 et $\text{tr } D = 0$. **D n'est pas diagonalisable, et $\chi_D = X^2$.**

Barème : a) 1 point ; b) 1 point : 0,5 pour $V^T U = \text{tr } A$, 0,5 pour A^2 ; c) 1,5 point : 0,5 pour $\dim E_0$ et AU , 0,5 pour chaque cas ; d) 1 point : 0,5 pour chaque sens ; e) 0,5 point.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : diagonalisation, trigonalisation et nilpotents

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Diagonalisation et trigonalisation](#) » en [maths spé](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [diagonalisation et trigonalisation](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths spé classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths spé sur ce thème

- [Contrôle de maths spé : DS de réduction des endomorphismes](#)