Corrigé du contrôle de maths spé : convergence dominée, intégration terme à terme

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : les deux théorèmes d'interversion	3 points
Exercice 2 : Limite d'une intégrale sur un intervalle variable	4 points
Exercice 3 : Deux limites par changement de variable	4 points
Exercice 4 : Une intégrale calculée comme somme de série	4 points
Exercice 5 : Problème : intégrale du produit de deux logarithmes	5 points
Total	**20 points**

Exercice 1 : Question de cours : les deux théorèmes d'interversion (3 points)

a. **Théorème de convergence dominée.** Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux sur I. On suppose que :

- (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ intégrable sur I telle que $|f_n(t)| \leq \varphi(t)$ pour tout n et tout $t \in I$ (hypothèse de domination).

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I, et $\int_I f_n \longrightarrow \int_I f$.

b. **Théorème d'intégration terme à terme.** Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables sur I. On suppose que :

- la série $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I ;
- la série numérique $\sum \int_I |f_n|$ converge.

Alors f est intégrable sur I, la série $\sum \int_I f_n$ converge, et

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n .$$

Erreur fréquente : choisir une fonction dominante qui dépend de n. La domination doit être uniforme en n.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 point pour la convergence simple et la continuité par morceaux, 0,5 point pour la domination, 0,5 point pour la conclusion ; b) 1,5 point : 0,5 point pour l'intégrabilité des f_n et la convergence simple, 0,5 point pour la série des intégrales des modules, 0,5 point pour la conclusion.

Exercice 2 : Limite d'une intégrale sur un intervalle variable (4 points)

a. Soit $t \geq 0$ fixé. Pour $n > t$, on a $f_n(t) = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right)$. Or $n\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) = n\left(-\frac{t}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \to -t$. **Par continuité de l'exponentielle,** (f_n)

converge simplement vers $t \to e^{-t}$ **sur** $[0,+\infty[$ **.**

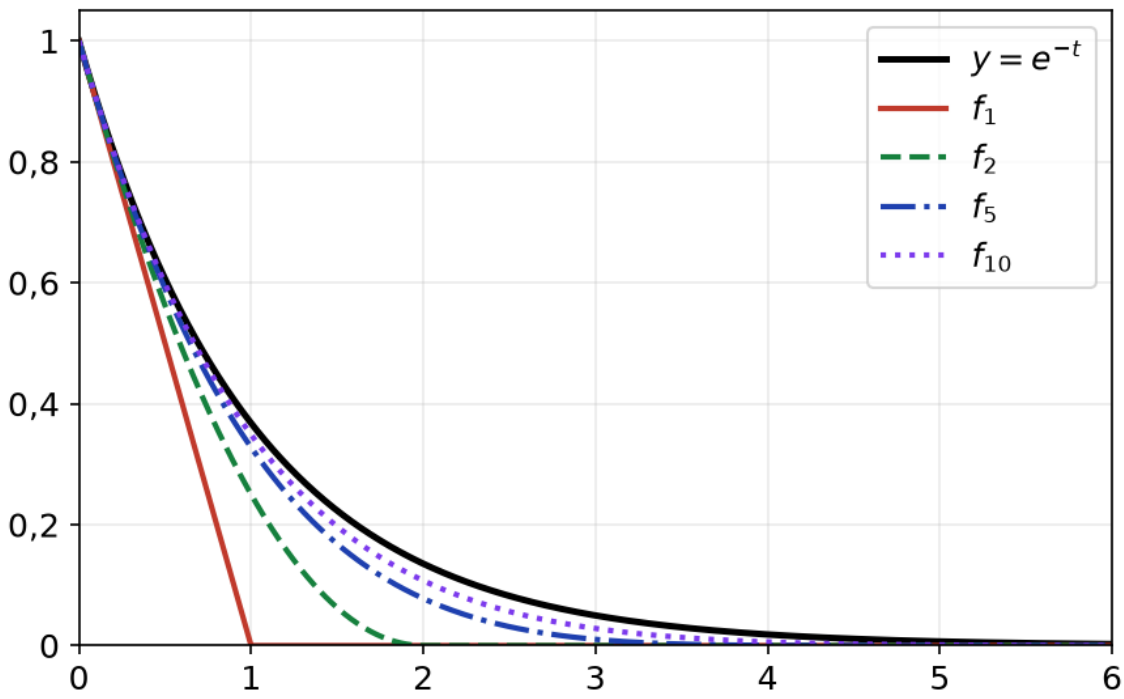
b. On pose $\psi(u) = \ln(1-u) + u$ sur $[0,1[$. Alors $\psi'(u) = 1 - \frac{1}{1-u} = -\frac{u}{1-u} \leq 0$, donc ψ décroît et $\psi(u) \leq \psi(0) = 0$.

Pour $t \in [0,n[$, on applique cette inégalité à $u = \frac{t}{n}$: $n\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq -t$, donc $0 \leq f_n(t) \leq e^{-t}$ par croissance de l'exponentielle. Pour $t \geq n$, $f_n(t) = 0 \leq e^{-t}$.
Ainsi $0 \leq f_n(t) \leq e^{-t}$ **pour tous** n **et** t **.**

c. On vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée sur $[0,+\infty[$. D'abord, chaque f_n est continue par morceaux (continue sur $[0,n]$ et nulle ensuite). Ensuite, la limite simple $t \to e^{-t}$ est continue. Enfin, la domination $|f_n| \leq \varphi$ vaut avec $\varphi(t) = e^{-t}$, intégrable et indépendante de n. Par conséquent :

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt \longrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1.$$

Donc $\lim I_n = 1$ **.**



Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

d. Avec le changement de variable affine $u = 1 - \frac{t}{n}$, on a $dt = -n\,du$, donc $I_n = n\int_0^1 u^n\,du = \frac{n}{n+1}$. **On retrouve** $I_n = \frac{n}{n+1} \to 1$ **.**

Barème : a) 1 point ; b) 1,5 point : 0,5 point pour l'inégalité du logarithme, 1 point pour la domination (y compris $t \geq n$) ; c) 0,5 point, accordé seulement si les trois hypothèses sont écrites ; d) 1 point.

Exercice 3 : Deux limites par changement de variable (4 points)

a. Le changement de variable $u = nt$ est affine, donc licite sur le segment. Il donne $K_n = \int_0^n \frac{f(u/n)}{1+u^2}\,du$. Sur $[0,+\infty[$, on pose alors $g_n(u) = \frac{f(u/n)}{1+u^2}$ si $u \leq n$ et $g_n(u) = 0$ sinon, de sorte que $K_n = \int_0^{+\infty} g_n$. On vérifie ensuite les hypothèses du théorème de convergence dominée.

- Chaque g_n est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$, avec au plus une discontinuité en n .
- Soit $u \geq 0$ fixé. Pour $n \geq u$, on a $g_n(u) = \frac{f(u/n)}{1+u^2}$, qui tend vers $\frac{f(0)}{1+u^2}$ par continuité de f en 0 . La limite est continue.
- La fonction f est continue sur le segment $[0,1]$, donc bornée : $|g_n(u)| \leq \frac{|f|_\infty}{1+u^2}$, fonction intégrable sur $[0,+\infty[$ et indépendante de n .

Par conséquent :

$$K_n \longrightarrow f(0)\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = f(0)[\arctan u]_0^{+\infty}.$$

Donc $K_n \to \frac{\pi}{2} f(0)$**.**

b. D'abord, $1 - J_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\, dt$. L'application $u \to u^{1/n}$ est une bijection de $]0,1[$ sur $]0,1[$, de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante. On pose donc $t = u^{1/n}$, avec $dt = \frac{1}{n} u^{1/n-1}\, du$:

$$1 - J_n = \int_0^1 \frac{u}{1+u} \cdot \frac{1}{n} u^{1/n-1}\, du = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u^{1/n}}{1+u}\, du.$$

Ensuite, on applique la convergence dominée à $h_n(u) = \frac{u^{1/n}}{1+u}$ sur $]0,1]$. Ces fonctions sont continues. Pour $u \in]0,1]$, $u^{1/n} = e^{(\ln u)/n} \to 1$, donc $h_n(u) \to \frac{1}{1+u}$, limite continue. Enfin, $0 \le h_n(u) \le \frac{1}{1+u}$, intégrable sur $]0,1]$. Ainsi $n(1 - J_n) \to \int_0^1 \frac{du}{1+u} = \ln 2$.

Par conséquent, $J_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$**.**

Barème : a) 2,5 points : 0,5 point pour le changement de variable, 0,5 point pour la limite simple, 1 point pour la domination (bornitude de f justifiée), 0,5 point pour le calcul final ; b) 1,5 point : 0,5 point pour le changement de variable, 0,5 point pour la convergence dominée, 0,5 point pour le développement asymptotique.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Exercice 4 : Une intégrale calculée comme somme de série (4 points)

a. La fonction g est continue et positive sur $]0,+\infty[$. En 0, $e^t - 1 \sim t$, donc $g(t) \to 1$: g se prolonge par continuité en 0. En $+\infty$, $g(t) \sim t\,e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. **Par comparaison au critère de Riemann, g est intégrable sur $]0,+\infty[$.**

b. Pour $t > 0$, on a $0 < e^{-t} < 1$. La série géométrique donne alors :

$$g(t) = \frac{t\,e^{-t}}{1 - e^{-t}} = t\,e^{-t} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kt} = \sum_{n=1}^{+\infty} t\,e^{-nt}.$$

L'égalité est démontrée.

c. Pour $n \geq 1$, on pose $u = nt$ (changement de variable linéaire). D'après le calcul de $\int_0^{+\infty} u\,e^{-u}\,du = 1! = 1$, on obtient :

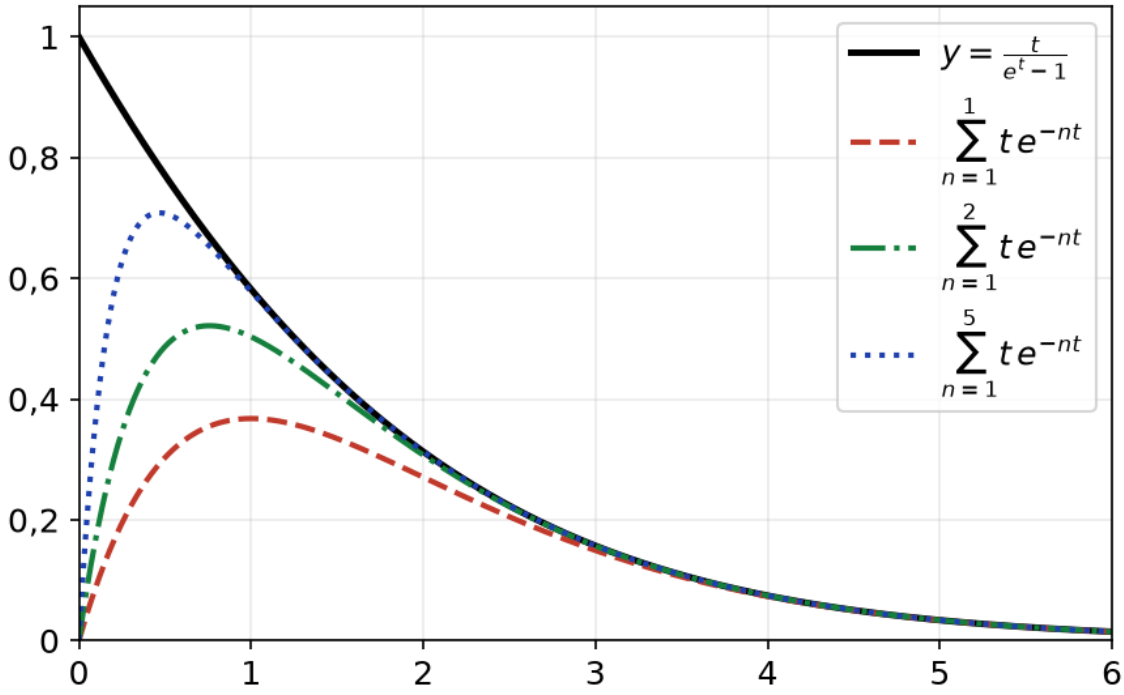
$$\int_0^{+\infty} t\,e^{-nt}\,dt = \frac{1}{n^2} \int_0^{+\infty} u\,e^{-u}\,du = \frac{1}{n^2}.$$

On vérifie maintenant les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sur $]0,+\infty[$, avec $f_n(t) = t\,e^{-nt}$.

- Chaque f_n est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$, comme on vient de le voir.
- La série $\sum f_n$ converge simplement vers g, qui est continue, d'après b).

◦ Comme $f_n \geq 0$, $\int_0^{+\infty} |f_n| = \frac{1}{n^2}$, terme général d'une série convergente.

L'intégration terme à terme est donc justifiée.



d. Par conséquent :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\, dt = \frac{\pi^2}{6}$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Barème : a) 0,5 point ; b) 1 point ; c) 2 points : 1 point pour le calcul de $\frac{1}{n^2}$, 1 point pour les trois hypothèses vérifiées ; d) 0,5 point.

Exercice 5 : Problème : intégrale du produit de deux logarithmes (5 points)

a. La fonction h est continue sur $]0,1[$. En 0, $\ln(1-t) \sim -t$, donc $h(t) \sim -t\ln t \to 0$. En 1, $\ln t \sim t-1$, donc $h(t) \sim -(1-t)\ln(1-t) \to 0$ par croissances comparées. Ainsi h se prolonge par continuité sur le segment $[0,1]$, avec $h(0) = h(1) = 0$. **Une fonction continue sur un segment est intégrable : L est bien définie.**

b. Soit $\varepsilon \in]0,1[$. On intègre par parties sur $[\varepsilon, 1]$:

$$\int_\varepsilon^1 t^n \ln t \, dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln t\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{t^n}{n+1}\, dt = -\frac{\varepsilon^{n+1}\ln\varepsilon}{n+1} - \frac{1-\varepsilon^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

Quand $\varepsilon \to 0^+$, $\varepsilon^{n+1}\ln\varepsilon \to 0$. **Donc** $\int_0^1 t^n \ln t \, dt = -\frac{1}{(n+1)^2}$.

c. Pour $t \in]0,1[$, le développement $\ln(1-t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}$ donne :

$$h(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t), \text{ avec } f_n(t) = -\frac{t^n \ln t}{n} \geq 0.$$

On vérifie alors les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sur $]0,1[$.

- Chaque f_n est continue sur $]0,1[$ et intégrable, d'après b).

- La série $\sum f_n$ converge simplement vers h, continue sur $]0,1[$.
- Comme $f_n \geq 0$, $\int_0^1 |f_n| = \frac{1}{n(n+1)^2} \leq \frac{1}{n^3}$, terme général d'une série convergente.

Par conséquent $L = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$.

d. On réduit au même dénominateur $n(n+1)^2$:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - n(n+1) - n}{n(n+1)^2} = \frac{n^2+2n+1-n^2-n-n}{n(n+1)^2} = \frac{1}{n(n+1)^2}.$$

Les trois séries convergent, donc on peut sommer séparément. D'une part, la somme télescopique vaut $\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1} \to 1$. D'autre part, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1$. Ainsi :

$$L = 1 - \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) = 2 - \frac{\pi^2}{6}.$$

Donc $L = 2 - \frac{\pi^2}{6} \approx 0{,}355$, valeur positive comme attendu, puisque $\ln t$ et $\ln(1-t)$ sont négatifs sur $]0,1[$.

Barème : a) 1 point : 0,5 point par borne ; b) 1 point ; c) 1,5 point : 0,5 point pour le développement, 1 point pour les hypothèses vérifiées ; d) 1,5 point : 0,5 point pour la décomposition, 1 point pour le calcul de L.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Revenir à l'énoncé du contrôle

Après le corrigé du contrôle : convergence dominée, intégration terme à terme

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « Convergence dominée » en maths spé puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** convergence dominée.

Retrouvez tous les **contrôles de maths spé** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.