

Corrigé du contrôle de maths spé : compacité, connexité par arcs, dimension finie

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : bornes atteintes et dimension finie	4 points
Exercice 2 : Compacité de $O_n(\mathbb{R})$ et distance à un fermé	4 points
Exercice 3 : Connexité par arcs des groupes linéaires	5 points
Exercice 4 : Théorème de Heine sur des exemples	3 points
Exercice 5 : Problème : composantes connexes par arcs des projecteurs	4 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : bornes atteintes et dimension finie (4 points)

- a. **Énoncé.** Si K est une partie compacte non vide d'un espace normé et si $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors f est bornée et atteint ses bornes : il existe $x_0, x_1 \in K$ tels que $f(x_0) = \inf_K f$ et $f(x_1) = \sup_K f$.

f est bornée. Sinon, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $x_k \in K$ tel que $|f(x_k)| \geq k$. Par compacité, une suite extraite $(x_{\sigma(k)})$ converge vers $\ell \in K$. Par continuité de f en ℓ ,

$f(x_{\sigma(k)}) \rightarrow f(\ell)$, alors que $|f(x_{\sigma(k)})| \geq \sigma(k) \geq k$ tend vers $+\infty$: c'est absurde.

La borne supérieure est atteinte. Soit $M = \sup_K f$, qui existe car $f(K)$ est non vide et majoré. Par caractérisation de la borne supérieure, il existe $x_k \in K$ tel que

$M - \frac{1}{k+1} < f(x_k) \leq M$. Une suite extraite $(x_{\sigma(k)})$ converge vers $x_1 \in K$, et par continuité $f(x_1) = \lim f(x_{\sigma(k)}) = M$. On traite la borne inférieure de même, avec $-f$.

Le théorème est démontré.

b. Pour $x = \sum x_i e_i$, l'inégalité triangulaire et l'homogénéité donnent :

$$N(x) \leq \sum_{i=1}^n |x_i| N(e_i) \leq C N_\infty(x), \quad C = \sum_{i=1}^n N(e_i) > 0.$$

Ensuite, $|N(x) - N(y)| \leq N(x - y) \leq C N_\infty(x - y)$: N est C -lipschitzienne, donc continue sur (E, N_∞) .

La sphère S est compacte et non vide (elle contient e_1). D'après a), N atteint sur S un minimum $m = N(x_0)$ avec $x_0 \in S$. Comme $x_0 \neq 0$, la séparation donne $m > 0$.

Pour $x \neq 0$, le vecteur $\frac{x}{N_\infty(x)}$ appartient à S , donc $N\left(\frac{x}{N_\infty(x)}\right) \geq m$, soit

$N(x) \geq m N_\infty(x)$; c'est encore vrai pour $x = 0$.

Théorème : sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes (chacune est équivalente à N_∞ , et l'équivalence est transitive).

Barème : a) 0,5 point pour l'énoncé, 0,75 point pour le caractère borné, 0,75 point pour la borne atteinte ;
b) 0,5 point pour la constante C , 0,5 point pour la continuité, 0,75 point pour la minoration, 0,25 point pour l'énoncé du théorème.

Exercice 2 : Compacité de $O_n(\mathbb{R})$ et distance à un fermé (4 points)

- a. L'application $\varphi : M \rightarrow M^T M$ est continue : le coefficient (i, j) de $M^T M$ vaut $\sum_k m_{ki} m_{kj}$, polynomial en les coefficients de M . Ainsi $O_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(\{I_n\})$ est fermé, comme image réciproque d'un fermé.

Si $M \in O_n(\mathbb{R})$, le coefficient diagonal (j, j) de $M^T M$ donne $\sum_i m_{ij}^2 = 1$, donc $|m_{ij}| \leq 1$ pour tous i, j : $\|M\| \leq 1$, et $O_n(\mathbb{R})$ est borné.

En dimension finie, une partie fermée et bornée est compacte : $O_n(\mathbb{R})$ est compact.

- b. Soit $x_0 \in F$ et $r = |a - x_0|$. L'ensemble $K = F \cap B_f(a, r)$ est fermé (intersection de deux fermés), borné, et contient x_0 . En dimension finie, il est donc compact et non vide. L'application $x \rightarrow |a - x|$ est 1-lipschitzienne, donc continue. Par le théorème des bornes atteintes, elle admet sur K un minimum en un point b .

Pour $x \in F \setminus K$, on a $|a - x| > r \geq |a - b|$, puisque $x_0 \in K$. Donc $|a - b| \leq |a - x|$ pour tout $x \in F$. Ainsi $|a - b| = d(a, F)$ avec $b \in F$.

- c. L'application $O \rightarrow \text{tr}(A O)$ est linéaire sur l'espace de dimension finie $M_n(\mathbb{R})$, donc continue. La partie $O_n(\mathbb{R})$ est compacte d'après a), et non vide car elle contient I_n . **Par le théorème des bornes atteintes, le maximum existe et il est atteint en un $O_0 \in O_n(\mathbb{R})$.**

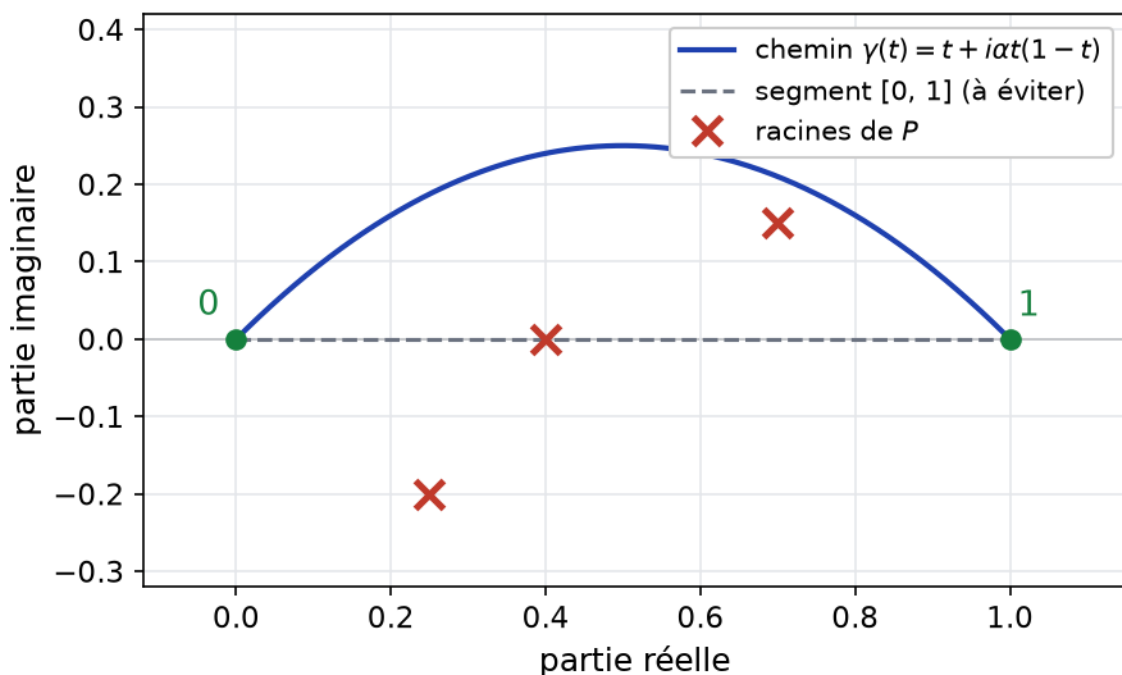
Barème : a) 0,5 point pour le fermé, 0,5 point pour le borné, 0,5 point pour la conclusion citée ; b) 0,75 point pour le compact K , 0,75 point pour la comparaison hors de K ; c) 1 point.

Erreur fréquente : appliquer directement les bornes atteintes sur F , qui n'est pas borné ; il faut d'abord se restreindre à une boule.

Exercice 3 : Connexité par arcs des groupes linéaires (5 points)

- a. Les coefficients de $(1 - z)A + zB$ sont des fonctions affines de z . D'après la formule du déterminant, somme de produits de coefficients, P est une fonction polynomiale de degré au plus n . De plus, $P(0) = \det A \neq 0$ et $P(1) = \det B \neq 0$. Le polynôme P est donc non nul : il a un ensemble fini Z de racines, qui ne contient ni 0 ni 1 .

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, le chemin $\gamma_\alpha(t) = t + i\alpha t(1 - t)$ est continu, avec $\gamma_\alpha(0) = 0$ et $\gamma_\alpha(1) = 1$. Soit $z = x + iy \in Z$. L'égalité $\gamma_\alpha(t) = z$ impose $t = x$ (parties réelles), puis $y = \alpha x(1 - x)$. Si $x \in \{0, 1\}$, cela donnerait $z \in \{0, 1\}$, exclu. Sinon, cela impose $\alpha = \frac{y}{x(1 - x)}$. Chaque racine interdit donc au plus une valeur de α . Comme Z est fini, on peut choisir α hors de ces valeurs : alors γ_α évite Z .



On pose enfin $\Gamma(t) = (1 - \gamma_\alpha(t)) A + \gamma_\alpha(t) B$. Cette application est continue de $[0, 1]$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avec $\Gamma(0) = A$ et $\Gamma(1) = B$. De plus, $\det \Gamma(t) = P(\gamma_\alpha(t)) \neq 0$, donc Γ est à valeurs dans $GL_n(\mathbb{C})$. **Deux matrices inversibles complexes sont toujours reliées par un chemin continu : $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.**

- b. Le déterminant est continu (polynomial en les coefficients). Soit D la matrice diagonale de coefficients $-1, 1, \dots, 1$, inversible. Supposons qu'un chemin continu γ relie I_n à D dans $GL_n(\mathbb{R})$. La fonction réelle $\det \circ \gamma$ est continue sur l'intervalle $[0, 1]$, vaut 1 en 0 et -1 en 1. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule en un point t_0 : alors $\gamma(t_0)$ n'est pas inversible, ce qui est absurde. **Donc $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.**

Dans le cas complexe, l'argument ne s'applique pas : $\mathbb{C}^*$ est lui-même connexe par arcs.

- c. Soient $a, b \in X$ et $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ un chemin continu de a à b . La fonction $g = f \circ \gamma$ est continue sur $[0, 1]$, à valeurs entières. Si $g(0) < g(1)$, le théorème des valeurs intermédiaires fournit t tel que $g(t) = g(0) + \frac{1}{2}$, qui n'est pas entier : c'est absurde. De même si $g(0) > g(1)$. Donc $f(a) = g(0) = g(1) = f(b)$. **La fonction f est constante.**

Barème : a) 0,5 point pour le polynôme non nul, 1 point pour le choix de α , 1 point pour le chemin dans $GL_n(\mathbb{C})$; b) 0,5 point pour la continuité du déterminant, 1 point pour l'argument des valeurs intermédiaires ; c) 1 point.

Exercice 4 : Théorème de Heine sur des exemples (3 points)

- a. **Théorème de Heine** : toute application continue sur une partie compacte d'un espace normé, à valeurs dans un espace normé, y est uniformément continue. Le segment $[0, 1]$ est un fermé borné de $\mathbb{R}$, donc compact, et la racine carrée y est continue. **Elle est donc uniformément continue sur $[0, 1]$.**

b. Par symétrie, on suppose $0 \leq y \leq x$. Alors :

$$(\sqrt{y} + \sqrt{x-y})^2 = x + 2\sqrt{y(x-y)} \geq x.$$

La racine carrée étant croissante, $\sqrt{x} \leq \sqrt{y} + \sqrt{x-y}$, d'où
 $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x-y}$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $\eta = \varepsilon^2$. Si $|x - y| < \eta$, alors $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \varepsilon$. **La racine carrée est donc uniformément continue sur $[0, +\infty[$ tout entier** : la compacité est une condition suffisante, mais pas nécessaire.

c. Posons $x_k = k + \frac{1}{k}$ et $y_k = k$ pour $k \geq 1$. Alors $|x_k - y_k| = \frac{1}{k} \rightarrow 0$, tandis que
 $x_k^2 - y_k^2 = 2 + \frac{1}{k^2} \geq 2$.

Si la fonction carré était uniformément continue, il existerait, pour $\varepsilon = 1$, un $\eta > 0$ tel que
 $|x - y| < \eta \Rightarrow |x^2 - y^2| < 1$. Pour $k > \frac{1}{\eta}$, on aurait donc $|x_k^2 - y_k^2| < 1$, ce qui contredit la minoration par 2. **La fonction carré n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.**

Barème : a) 0,5 point pour l'énoncé, 0,5 point pour l'application ; b) 0,5 point pour l'inégalité, 0,5 point pour la conclusion ; c) 1 point.

Exercice 5 : Problème : composantes connexes par arcs des projecteurs (4 points)

a. L'application $h : M \rightarrow M^2 - M$ est continue (coefficients polynomiaux), donc

$\mathcal{P} = h^{-1}(\{0\})$ est fermé.

Soit $M \in \mathcal{P}$. Le polynôme $X^2 - X = X(X - 1)$ annule M et il est scindé à racines simples. Donc M est diagonalisable, de spectre inclus dans $\{0, 1\}$. Quitte à réordonner la base de diagonalisation, M est semblable à une matrice J_r . Le rang étant invariant par similitude, $r = \text{rg } J_r = \text{rg } M$. **Enfin** $\text{tr } M = \text{tr } J_r = r = \text{rg } M$.

- b. Si $Q \in GL_n(\mathbb{C})$, alors $(Q J_r Q^{-1})^2 = Q J_r^2 Q^{-1} = Q J_r Q^{-1}$ et $\text{rg}(Q J_r Q^{-1}) = r$: cette matrice est dans $\mathcal{P}_r$. L'inclusion réciproque est la question a).
Donc $\mathcal{P}_r = \{Q J_r Q^{-1} : Q \in GL_n(\mathbb{C})\}$.

L'application $Q \rightarrow Q^{-1} = \frac{1}{\det Q} \text{Com}(Q)^T$ est continue sur $GL_n(\mathbb{C})$: ses coefficients sont des quotients de polynômes en les coefficients, à dénominateur non nul. Le produit matriciel étant continu, $\psi : Q \rightarrow Q J_r Q^{-1}$ est continue.

Soient $M_0 = \psi(Q_0)$ et $M_1 = \psi(Q_1)$ dans $\mathcal{P}_r$. D'après l'exercice 3, un chemin continu γ relie Q_0 à Q_1 dans $GL_n(\mathbb{C})$. Alors $\psi \circ \gamma$ est un chemin continu de M_0 à M_1 , à valeurs dans $\mathcal{P}_r$. **Ainsi $\mathcal{P}_r$ est connexe par arcs.**

- c. D'après a), $\mathcal{P}_r = \mathcal{P} \cap \text{tr}^{-1}(\{r\})$. La trace est linéaire en dimension finie, donc continue.
 $\mathcal{P}_r$ est donc fermé, comme intersection de deux fermés.

Pour $r = 0$, une matrice semblable à 0 est nulle, donc $\mathcal{P}_0 = \{0\}$. Pour $r = n$, une matrice semblable à I_n vaut I_n , donc $\mathcal{P}_n = \{I_n\}$. Ces deux ensembles sont compacts.

Pour $1 \leq r \leq n-1$, posons $M_t = J_r + t E_{1n}$. On a $J_r E_{1n} = E_{1n}$ (car $1 \leq r$), $E_{1n} J_r = 0$ (car la colonne n de J_r est nulle, puisque $n > r$) et $E_{1n}^2 = 0$. Donc $M_t^2 = J_r + t E_{1n} = M_t$, et $\text{tr } M_t = r$: $M_t \in \mathcal{P}_r$. Comme $|M_t|$ tend vers $+\infty$ avec $|t|$, $\mathcal{P}_r$ n'est pas borné, donc pas compact.

Conclusion : $\mathcal{P}_r$ est compact si et seulement si $r = 0$ ou $r = n$.

- d. Soit γ un chemin continu dans $\mathcal{P}$ reliant un élément de $\mathcal{P}_r$ à un élément de $\mathcal{P}_s$. La fonction $\text{tr} \circ \gamma$ est continue sur $[0, 1]$, qui est connexe par arcs, et elle est à valeurs entières d'après a). D'après l'exercice 3 c), elle est constante, donc $r = s$.

Chaque composante connexe par arcs de $\mathcal{P}$ est donc incluse dans un $\mathcal{P}_r$. Or $\mathcal{P}_r$ est connexe par arcs d'après b). **Les composantes connexes par arcs de $\mathcal{P}$ sont exactement $\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_n$.**

Barème : a) 0,25 point pour le fermé, 0,5 point pour la réduction, 0,25 point pour la trace ; b) 0,5 point pour l'égalité d'ensembles, 0,5 point pour la continuité de ψ , 0,5 point pour le chemin ; c) 0,25 point pour le fermé, 0,25 point pour $r \in \{0, n\}$, 0,5 point pour le contre-exemple ; d) 0,5 point.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : compacité, connexité par arcs, dimension finie

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Compacité et connexité par arcs](#) » en [maths spé](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [compacité et connexité par arcs](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths spé classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).