

Corrigé du contrôle de maths spé : adjoint, matrices orthogonales et isométries

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : adjoint d'un endomorphisme	4 points
Exercice 2 : Une rotation de l'espace	5 points
Exercice 3 : Réflections et isométries du plan	4 points
Exercice 4 : Problème : réduction des isométries	7 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : adjoint d'un endomorphisme (4 points)

a. *Existence.* Fixons $y \in E$. L'application $x \rightarrow \langle u(x), y \rangle$ est une forme linéaire sur E (composée de u linéaire et de la linéarité à gauche du produit scalaire). Par le **théorème de représentation** des formes linéaires en dimension finie, il existe un unique vecteur $z_y \in E$ tel que $\langle u(x), y \rangle = \langle x, z_y \rangle$ pour tout x . On pose $u^*(y) = z_y$.

Linéarité. Pour $y, y' \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\langle x, u^*(y) + \lambda u^*(y') \rangle = \langle u(x), y + \lambda y' \rangle$ pour tout x , donc par unicité $u^*(y + \lambda y') = u^*(y) + \lambda u^*(y')$.

Unicité. Si v et w conviennent, $\langle x, v(y) - w(y) \rangle = 0$ pour tout x ; avec

$x = v(y) - w(y)$, on obtient $v(y) = w(y)$. **L'adjoint u^* existe et est unique.**

b. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. En base orthonormée, le coefficient (i, j) de la matrice d'un endomorphisme v est $\langle e_i, v(e_j) \rangle$. Donc le coefficient (i, j) de la matrice de u^* est $\langle e_i, u^*(e_j) \rangle = \langle u(e_i), e_j \rangle = \langle e_j, u(e_i) \rangle = m_{ji}$. **La matrice de u^* dans $\mathcal{B}$ est M^T .** L'hypothèse « orthonormée » est indispensable.

c. Soit $y \in F^\perp$ et $x \in F$. Comme F est stable par u , $u(x) \in F$, donc $\langle x, u^*(y) \rangle = \langle u(x), y \rangle = 0$. Ainsi $u^*(y)$ est orthogonal à tout vecteur de F : $u^*(y) \in F^\perp$. **$F^\perp$ est stable par u^* .**

Barème : a) 0,5 point pour le théorème de représentation, 0,5 point pour la linéarité, 0,5 point pour l'unicité ; b) 0,5 point pour la formule des coefficients, 0,5 point pour la conclusion ; c) 1 point pour le calcul, 0,5 point pour la conclusion.

Exercice 2 : Une rotation de l'espace (5 points)

a. Notons $C_1 = \frac{1}{3}(2, 2, -1)$, $C_2 = \frac{1}{3}(-1, 2, 2)$, $C_3 = \frac{1}{3}(2, -1, 2)$ les colonnes de A . On a $|C_1|^2 = \frac{4+4+1}{9} = 1$, et de même $|C_2|^2 = |C_3|^2 = 1$. De plus $\langle C_1, C_2 \rangle = \frac{-2+4-2}{9} = 0$, $\langle C_1, C_3 \rangle = \frac{4-2-2}{9} = 0$, $\langle C_2, C_3 \rangle = \frac{-2-2+4}{9} = 0$. Les colonnes forment une base orthonormée : $A \in O_3(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $A^T A = I_3$.

b. En développant selon la première ligne :

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2(4+2) + 1 \times (4-1) + 2(4+2) = 12 + 3 + 12 = 27,$$

donc $\det A = \frac{27}{27} = 1$. $A \in SO_3(\mathbb{R})$: **f est une rotation de $\mathbb{R}^3$.**

c. L'axe est $\ker(A - I_3)$. On résout $3(A - I_3)X = 0$:

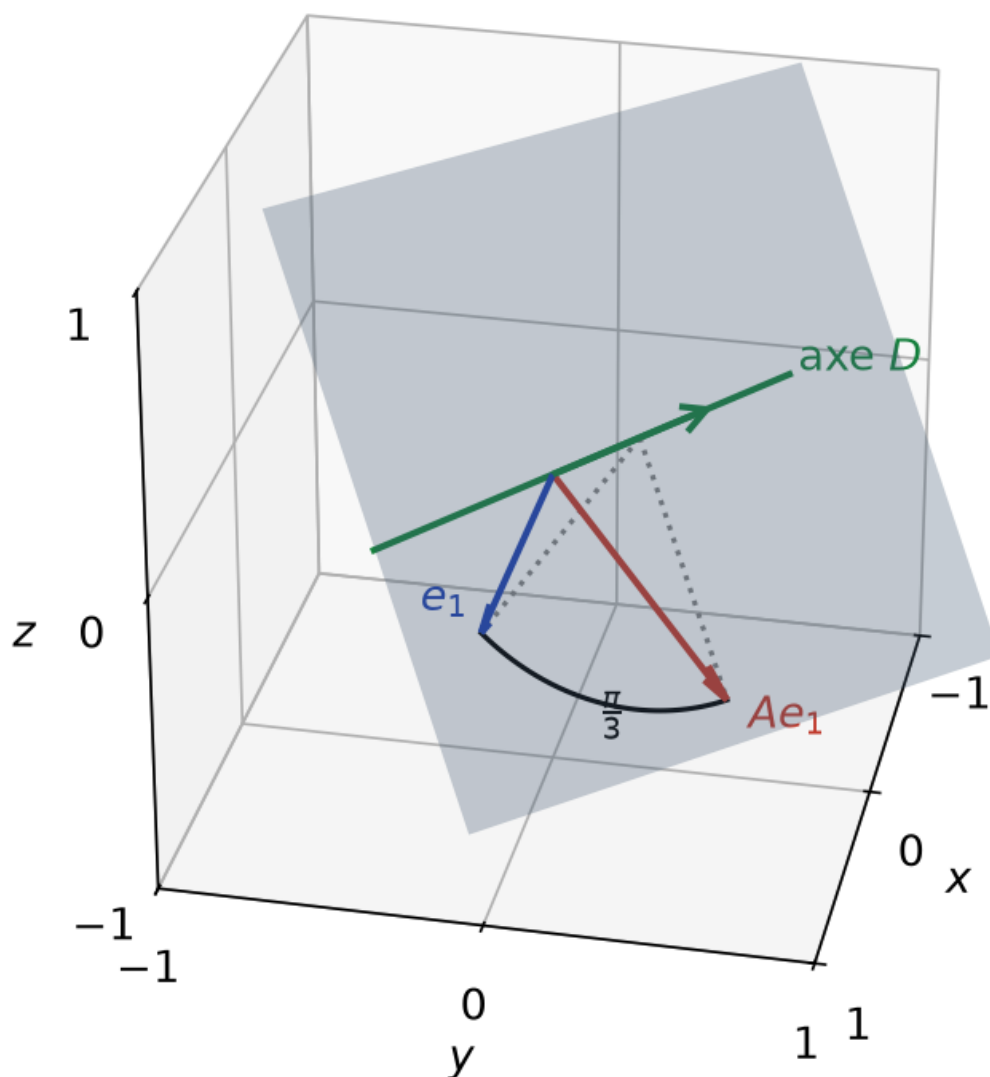
$$\begin{cases} -x - y + 2z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation donne $y = 2x - z$; la première devient $-3x + 3z = 0$, d'où $z = x$ puis $y = x$, et la troisième est alors vérifiée. f n'est pas l'identité, donc **l'axe de f est la droite $D = \mathbb{R}(1, 1, 1)$** .

- d. Pour une rotation d'angle θ , $\text{tr } A = 1 + 2\cos\theta$. Ici $\text{tr } A = \frac{2+2+2}{3} = 2$, donc $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$. Le signe de $\sin\theta$ est celui de $\det(u, x, f(x))$ pour tout $x \notin D$. Avec $x = e_1$ et $f(e_1) = C_1$:

$$\det(u, e_1, f(e_1)) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2/3 \\ 1 & 0 & 2/3 \\ 1 & 0 & -1/3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 2/3 \\ 1 & -1/3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0,$$

en développant selon la deuxième colonne (le mineur vaut $-\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -1$) . Donc $\sin\theta > 0$: **f est la rotation d'axe dirigé par $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$** .



e. Dans une base orthonormée directe (u, v, w) , la matrice de f est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R(\pi/3) & 0 \end{pmatrix}$ (par blocs), donc A^k représente la rotation d'axe D et d'angle $\frac{k\pi}{3}$. Ainsi $A^k = I_3$ si et seulement si $\frac{k\pi}{3} \in 2\pi\mathbb{Z}$, soit $6 \mid k$. **Le plus petit entier est $k = 6$.**

Erreur fréquente : déduire l'angle de la seule trace. Elle ne donne que $\cos\theta$; le signe de θ dépend de l'orientation de l'axe et se lit sur $\det(u, x, f(x))$.

Barème : a) 0,5 point pour les normes, 0,5 point pour l'orthogonalité ; b) 0,5 point pour le déterminant, 0,5 point pour la nature ; c) 0,5 point pour le système, 0,5 point pour l'axe ; d) 0,5 point pour $\cos\theta$, 0,5 point

pour le déterminant, 0,5 point pour l'angle ; e) 0,5 point.

Exercice 3 : Réflexions et isométries du plan (4 points)

- a. La réflexion s est la symétrie orthogonale par rapport à P : elle vaut id sur P et $-\text{id}$ sur $P^\perp = \mathbb{R}n$. Si p est le projecteur orthogonal sur $\mathbb{R}n$, $p(x) = \frac{\langle x, n \rangle}{|n|^2} n$ et $x = (x - p(x)) + p(x)$ avec $x - p(x) \in P$, donc $s(x) = (x - p(x)) - p(x) = x - 2p(x)$. Avec $|n|^2 = 9$, la matrice de s est $S = I_3 - \frac{2}{9} n n^\top$:

$$S = I_3 - \frac{2}{9} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

S est symétrique (visible). Ses colonnes sont unitaires ($49 + 16 + 16 = 81$, $16 + 1 + 64 = 81$, $16 + 64 + 1 = 81$) et deux à deux orthogonales ($28 + 4 - 32 = 0$, $-28 + 32 - 4 = 0$, $-16 + 8 + 8 = 0$), donc S est orthogonale. Contrôle : $Sn = \frac{1}{9}(7 - 8 - 8, 4 - 2 + 16, -4 - 16 + 2) = (-1, 2, -2) = -n$.

- b. Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$. Sa première colonne est unitaire : il existe θ tel que $(a, b) = (\cos\theta, \sin\theta)$. La deuxième colonne est unitaire et orthogonale à la première, donc égale à $(-\sin\theta, \cos\theta)$ ou à $(\sin\theta, -\cos\theta)$ (l'orthogonal d'un vecteur unitaire du plan est une droite, qui ne contient que deux vecteurs unitaires). Donc $M = R(\theta)$ ou $M = S(\theta)$. Réciproquement, ces matrices ont des colonnes orthonormées, donc sont orthogonales.

$S(\theta)$ est symétrique et orthogonale, donc $S(\theta)^2 = S(\theta)^\top S(\theta) = I_2$: c'est une symétrie orthogonale, de déterminant -1 , donc par rapport à une droite. On vérifie que $S(\theta)$ fixe $\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$: $S(\theta)$ est la réflexion d'axe la droite dirigée par $\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$, et $R(\theta)$ la rotation d'angle θ .

- c. Par les formules d'addition :

$$S(\alpha)S(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} = R(\alpha - \beta).$$

La composée de deux réflexions du plan est une rotation, d'angle le double de l'angle orienté

$\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$ entre leurs axes.

Barème : a) 0,5 point pour la formule de s , 0,5 point pour la matrice, 0,5 point pour les vérifications ; b) 1 point pour la classification, 0,5 point pour la nature de $S(\theta)$; c) 0,5 point pour le calcul, 0,5 point pour l'interprétation.

Exercice 4 : Problème : réduction des isométries (7 points)

- a. Une isométrie conserve le produit scalaire (par polarisation) et est injective, donc bijective en dimension finie. Pour $x, y \in E$: $\langle u(x), y \rangle = \langle u(x), u(u^{-1}(y)) \rangle = \langle x, u^{-1}(y) \rangle$. Par unicité de l'adjoint, $u^* = u^{-1}$. Si $u(x) = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$, alors $|x| = |u(x)| = |\lambda| |x|$, donc $|\lambda| = 1$: $\lambda \in \{-1, 1\}$.
- b. $u(F) \subset F$ et u est injective, donc $\dim u(F) = \dim F$ et $u(F) = F$. Il en résulte $u^{-1}(F) = F$, soit $u^*(F) = F$: F **est stable par** u^* . L'exercice 1 c) appliqué à u^* montre que $F^\perp$ est stable par $(u^*)^* = u$ (l'égalité $(u^*)^* = u$ découle de la symétrie du produit scalaire et de l'unicité de l'adjoint). $F^\perp$ **est stable par** u .
- c. $MZ = \lambda Z$ s'écrit $MX + iMY = (aX - bY) + i(bX + aY)$. Comme M , X , Y , a , b sont réels, on identifie parties réelle et imaginaire : $MX = aX - bY$ et $MY = bX + aY$.

Si u a une valeur propre réelle, un vecteur propre associé engendre une droite stable. Sinon, par le théorème de d'Alembert-Gauss, M a une valeur propre complexe $a + ib$ avec $b \neq 0$; les relations précédentes montrent que le sous-espace Π engendré par les vecteurs de coordonnées X et Y est stable. Il est non nul ($Z \neq 0$) et ne peut être une droite, qui serait une droite stable donc porterait une valeur propre réelle. u **admet donc une droite ou un plan stable**.

- d. Récurrence forte sur n ; le cas $n = 0$ est vide. Soit $n \geq 1$ et supposons le résultat vrai en dimension $< n$. Par c), il existe F stable de dimension 1 ou 2. Par b), $F^\perp$ est stable, et les restrictions u_F et $u_{F^\perp}$ conservent la norme : ce sont des isométries de F et $F^\perp$.

◦ Si $F = \mathbb{R}e$ avec $|e| = 1$, $u(e) = \pm e$ par a) : bloc (1) ou (-1) .

◦ Si $\dim F = 2$, dans une base orthonormée de F la matrice de u_F est dans

$O_2(\mathbb{R})$, donc égale à $R(\theta)$ ou $S(\theta)$ (exercice 3). Dans le second cas, u_F est une réflexion : dans une base orthonormée formée d'un vecteur de l'axe et d'un vecteur orthogonal, sa matrice est $\text{diag}(1, -1)$.

L'hypothèse de récurrence fournit une base orthonormée convenable de $F^\perp$, de dimension $n-1$ ou $n-2$. En la concaténant avec celle de F , on obtient une base orthonormée de $E = F \oplus F^\perp$ dans laquelle **la matrice de u est diagonale par blocs, avec des blocs (1) , (-1) et $R(\theta)$** .

- e. Pour $n = 3$, la matrice réduite contient soit trois blocs (± 1) , soit un bloc (ϵ) et un bloc $R(\theta)$. Dans le second cas, $\det u = \epsilon \det R(\theta) = \epsilon = 1$. Dans le premier, le produit des trois signes vaut 1 : la matrice est $\text{diag}(1, 1, 1) = \text{diag}(1, R(0))$ ou, après réordonnement, $\text{diag}(1, -1, -1) = \text{diag}(1, R(\pi))$. Dans tous les cas, 1 **est valeur propre de u** et, en plaçant en premier un vecteur unitaire de l'axe, **la matrice de u est**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ dans une base orthonormée.}$$

- f. B envoie e_1, e_2, e_3, e_4 sur e_2, e_3, e_4, e_1 : ses colonnes forment une base orthonormée, donc $B \in O_4(\mathbb{R})$. On cherche des sous-espaces stables :

- $\epsilon_1 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)$ vérifie $B\epsilon_1 = \epsilon_1$;
- $\epsilon_2 = \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1)$ vérifie $B\epsilon_2 = \frac{1}{2}(-1, 1, -1, 1) = -\epsilon_2$;
- $\epsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0)$ et $\epsilon_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, -1)$ vérifient $B\epsilon_3 = \epsilon_4$ et $B\epsilon_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1, 0) = -\epsilon_3$.

Ces quatre vecteurs sont unitaires et deux à deux orthogonaux (produits scalaires calculés directement), donc forment une base orthonormée $\mathcal{C}$. La matrice de l'endomorphisme dans $\mathcal{C}$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

avec les blocs (1) , (-1) et $R\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Cohérence : les valeurs propres complexes de B sont les racines quatrièmes de l'unité $1, -1, i, -i$, et $e^{\pm i\pi/2} = \pm i$.

Erreur fréquente : affirmer que $F^\perp$ est stable par u dès que F l'est, pour un endomorphisme quelconque. C'est faux en général ; on utilise ici que $u^* = u^{-1}$.

Barème : a) 0,5 point pour $u^* = u^{-1}$, 0,5 point pour les valeurs propres ; b) 0,5 point pour $u(F) = F$, 0,5 point pour la stabilité de $F^\perp$; c) 0,5 point pour les relations, 0,5 point pour la droite ou le plan stable ; d) 0,5 point pour la mise en place de la récurrence, 0,5 point pour les deux cas, 0,5 point pour la conclusion ; e) 0,5 point pour la discussion, 0,5 point pour la matrice ; f) 0,5 point pour l'orthogonalité de B , 0,5 point pour la base, 0,5 point pour les blocs.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : adjoint, matrices orthogonales et isométries

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours [« Isométries vectorielles » en maths spé](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [isométries vectorielles](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths spé classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).