

Corrigé du contrôle de maths L3 : tribus, mesures et fonctions mesurables

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours, continuité monotone d'une mesure	4 points
Exercice 2 : Une tribu engendrée finie	4 points
Exercice 3 : Générateurs de la tribu borélienne	4 points
Exercice 4 : Mesurabilité du sup et de la limite supérieure	3 points
Exercice 5 : Problème, ensembles négligeables et ensemble de Cantor	5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours, continuité monotone d'une mesure (4 points)

- a. On pose $C_0 = A_0$ et, pour $n \geq 1$, $C_n = A_n \setminus A_{n-1}$. Ces ensembles sont dans $\mathcal{A}$, car une tribu est stable par différence. Ils sont deux à deux disjoints : si $k < n$, on a $C_k \subset A_k \subset A_{n-1}$, tandis que C_n ne rencontre pas A_{n-1} . Par récurrence,

$\bigcup_{k=0}^n C_k = A_n$, donc aussi $\bigcup_n C_n = \bigcup_n A_n$. La sigma-additivité donne alors

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(C_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \mu(C_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n),$$

la dernière égalité venant de l'additivité finie. **La mesure est continue le long des suites croissantes, sans hypothèse de finitude.**

- b. On pose $A_n = B_0 \setminus B_n$: c'est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{A}$, de réunion $B_0 \setminus \bigcap_n B_n$. Comme $B_n \subset B_0$ et $\mu(B_0) < +\infty$, on a $\mu(A_n) = \mu(B_0) - \mu(B_n)$, et de même $\mu\left(B_0 \setminus \bigcap_n B_n\right) = \mu(B_0) - \mu\left(\bigcap_n B_n\right)$. La question a) donne donc $\mu(B_0) - \mu\left(\bigcap_n B_n\right) = \mu(B_0) - \lim \mu(B_n)$. Comme $\mu(B_0)$ est fini, on peut simplifier : $\mu\left(\bigcap_n B_n\right) = \lim_n \mu(B_n)$.
- c. Pour tout n , $\lambda([n, +\infty[) \geq \lambda([n, n+p]) = p$ pour tout entier p , donc $\lambda(B_n) = +\infty$. En revanche, aucun réel n'est supérieur à tous les entiers, donc $\bigcap_n B_n = \emptyset$ et $\lambda\left(\bigcap_n B_n\right) = 0 \neq +\infty$. L'hypothèse $\mu(B_0) < +\infty$ n'est pas satisfaite : elle est donc indispensable.

Barème : a) 2 points : 1 point pour la construction des ensembles disjoints, 1 point pour le passage à la limite ; b) 1 point, dont 0,5 pour l'usage explicite de la finitude ; c) 1 point : 0,5 pour les deux mesures, 0,5 pour l'hypothèse identifiée.

Exercice 2 : Une tribu engendrée finie (4 points)

- a. Une tribu est stable par complémentaire et par intersection finie. On écrit donc $\{1\} = A \cap B^c$, $\{2\} = A \cap B$, $\{3\} = B \cap A^c$ et $\{4, 5, 6\} = (A \cup B)^c$. **Ces quatre parties, appelées atomes, sont dans $\mathcal{T}$.**
- b. Les quatre atomes sont non vides, deux à deux disjoints, et leur réunion est Ω : ils forment une partition de Ω .

D'abord, $\emptyset$ (réunion vide) et Ω (réunion des quatre) sont dans $\mathcal{U}$. Ensuite, le complémentaire d'une réunion d'atomes est la réunion des autres atomes, puisqu'ils forment une partition : $\mathcal{U}$ est stable par complémentaire. Enfin, $\mathcal{U}$ est finie, donc une réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{U}$ est une réunion finie de réunions d'atomes, encore dans $\mathcal{U}$. Ainsi **$\mathcal{U}$ est une tribu.**

Elle contient $A = \{1\} \cup \{2\}$ et $B = \{2\} \cup \{3\}$, donc elle contient la plus petite tribu qui les

contient : $\mathcal{T} \subset \mathcal{U}$. Réciproquement, par a), les atomes sont dans $\mathcal{T}$, qui est stable par réunion, donc $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$. Ainsi $\mathcal{T} = \mathcal{U}$. Deux sous-familles distinctes d'atomes donnent deux réunions distinctes (atomes disjoints et non vides), donc $\text{card } \mathcal{T} = 2^4 = 16$.

- c. Comme Ω est fini, f est $\mathcal{T}$ -mesurable si et seulement si $f^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{T}$ pour tout réel y , c'est-à-dire si f est constante sur chaque atome.

Pour $f(\omega) = (\omega - 2)^2$, on a $f(4) = 4$ et $f(5) = 9$: f n'est pas constante sur $\{4, 5, 6\}$, et $f^{-1}(\{4\}) = \{4\} \notin \mathcal{T}$. **Cette fonction n'est pas mesurable.**

Pour $f(\omega) = \min(\omega, 4)$, les valeurs sont 1, 2, 3 sur les trois premiers atomes et 4 sur $\{4, 5, 6\}$. **Cette fonction est mesurable.**

Barème : a) 1 point (0,25 par atome) ; b) 2 points : 1 point pour la preuve que $\mathcal{U}$ est une tribu, 0,5 pour la double inclusion, 0,5 pour le cardinal ; c) 1 point (0,5 par fonction, avec justification).

Erreur fréquente : ajouter seulement $A \cap B$, $A \cup B$ et les complémentaires sans vérifier la stabilité ; la description par les atomes évite tout oubli.

Exercice 3 : Générateurs de la tribu borélienne (4 points)

- a. Pour tout réel a , le complémentaire de $]-\infty, a]$ est l'ouvert $]a, +\infty[$. Donc $]-\infty, a]$ est fermé, par conséquent borélien. Ainsi $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est une tribu qui contient tous les générateurs de $\mathcal{C}$. Par minimalité de la tribu engendrée, $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
- b. On a $]-\infty, b[= \bigcup_{n \geq 1}]-\infty, b - \frac{1}{n}]$. En effet, si $x < b$, alors $x \leq b - \frac{1}{n}$ dès que $n \geq \frac{1}{b-x}$. C'est une réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{C}$, donc $]-\infty, b[\in \mathcal{C}$. Ensuite, $]a, b[=]-\infty, b[\cap (]-\infty, a])^c$, intersection de deux éléments de $\mathcal{C}$. Donc $]a, b[\in \mathcal{C}$.
- c. Soit $x \in U$. Comme U est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $]x - r, x + r[\subset U$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on choisit $p \in \mathbb{Q} \cap]x - r, x[$ et $q \in \mathbb{Q} \cap]x, x + r[$. Alors $x \in]p, q[\subset U$. Donc U est la réunion des $]p, q[$ inclus dans U , à bornes rationnelles.

Or $\mathbb{Q}^2$ est dénombrable : cette réunion est dénombrable. D'après b), chaque $]p, q[$ est dans $\mathcal{C}$, donc $U \in \mathcal{C}$. La tribu $\mathcal{C}$ contient ainsi tous les ouverts, donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}$. Avec a), $\mathcal{C} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Barème : a) 1 point ; b) 1,5 point : 1 point pour la réunion dénombrable justifiée, 0,5 pour l'intervalle ouvert ; c) 1,5 point : 0,5 pour l'usage de la densité, 0,5 pour la dénombrabilité, 0,5 pour la conclusion.

Exercice 4 : Mesurabilité du sup et de la limite supérieure (3 points)

- a. Pour tout réel a , on a $\sup_n f_n(x) \leq a$ si et seulement si $f_n(x) \leq a$ pour tout n . Ainsi

$$g^{-1}([-\infty, a]) = \bigcap_{n \geq 0} f_n^{-1}(]-\infty, a]).$$

C'est une intersection dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$, donc un élément de $\mathcal{A}$. Or il suffit de tester la mesurabilité sur une famille génératrice de la tribu d'arrivée. **Donc g est mesurable.**

- b. D'abord, $\inf_n f_n = -\sup_n (-f_n)$ est mesurable. Ensuite, $g_n = \sup_{k \geq n} f_k$ est mesurable par a), et $\limsup_n f_n = \inf_n g_n$ est donc mesurable. De même, $\liminf_n f_n = -\limsup_n (-f_n)$ est mesurable.

Notons $L = \limsup_n f_n$ et $\ell = \liminf_n f_n$. La suite converge dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\ell = L$ avec une valeur finie. Comme $\ell \leq L$ toujours, et grâce à la densité de $\mathbb{Q}$:

$$C = \left(\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{\ell < r\} \cap \{r < L\} \right)^c \cap \{L < +\infty\} \cap \{\ell > -\infty\}.$$

Tous ces ensembles sont dans $\mathcal{A}$, et la réunion est dénombrable : $C \in \mathcal{A}$.

- c. Soit V un ouvert de $\mathbb{R}$. Alors $(h \circ f_0)^{-1}(V) = f_0^{-1}(h^{-1}(V))$. Par continuité de h , $h^{-1}(V)$ est ouvert, donc borélien, et son image réciproque par f_0 est dans $\mathcal{A}$. Les ouverts engendrant $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $h \circ f_0$ est **mesurable**. Les fonctions $t \rightarrow |t|$ et $t \rightarrow \max(t, 0)$

sont continues, donc $|f_0|$ et f_0^+ sont mesurables.

Barème : a) 1 point ; b) 1 point : 0,5 pour la limite supérieure et la limite inférieure, 0,5 pour l'ensemble de convergence ; c) 1 point : 0,5 pour la composition, 0,5 pour les applications.

Exercice 5 : Problème, ensembles négligeables et ensemble de Cantor (5 points)

- a. Pour tout rationnel q , on a $\lambda(\{q\}) = \lambda([q, q]) = 0$. Or $\mathbb{Q}$ est dénombrable, et il s'écrit comme réunion disjointe dénombrable des singletons $\{q\}$. Par sigma-additivité,

$$\lambda(\mathbb{Q}) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} 0 = 0. \quad \mathbb{Q} \text{ est négligeable.}$$

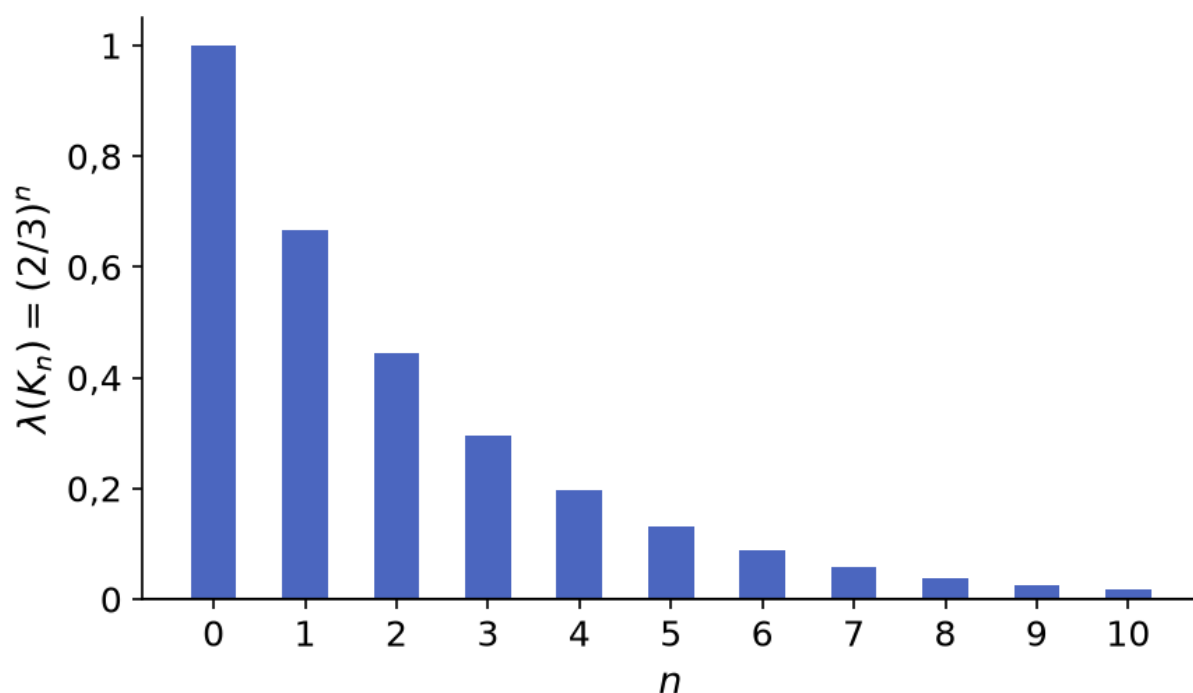
- b. On montre par récurrence que $K_{n+1} \subset K_n$. Au rang 0, $K_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \subset [0, 1]$.

Supposons ensuite $K_{n+1} \subset K_n$. Alors $\frac{1}{3} K_{n+1} \subset \frac{1}{3} K_n$ et

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} K_{n+1} \subset \frac{2}{3} + \frac{1}{3} K_n, \text{ d'où } K_{n+2} \subset K_{n+1}. \text{ La suite } (K_n) \text{ est décroissante.}$$

Par ailleurs, K_n est réunion disjointe de 2^n intervalles de longueur 3^{-n} , donc, par additivité,

$$\lambda(K_n) = 2^n \times 3^{-n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$



- c. Chaque K_n est fermé, comme réunion finie de segments. Donc K est fermé, comme intersection de fermés, et borné car inclus dans $[0, 1]$: c'est un compact. De plus, 0 appartient à tous les K_n (choisir tous les a_k nuls), donc $K \neq \emptyset$. Enfin, la suite (K_n) est décroissante et $\lambda(K_0) = 1 < +\infty$. La continuité décroissante de l'exercice 1 donne donc

$$\lambda(K) = \lim_n \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

- d. Fixons n . On écrit $\Phi(a) = s_n + r_n$, avec $s_n = \sum_{k=1}^n a_k 3^{-k}$ et $r_n = \sum_{k>n} a_k 3^{-k}$. Or $0 \leq r_n \leq \sum_{k>n} 2 \times 3^{-k} = 3^{-n}$. Ainsi $\Phi(a) \in [s_n, s_n + 3^{-n}] \subset K_n$. Ceci vaut pour tout n , donc $\Phi(a) \in K$.

Soient ensuite $a \neq b$, et m le premier indice où elles diffèrent, avec par exemple $a_m = 2$ et $b_m = 0$. Alors

$$\Phi(a) - \Phi(b) = 2 \times 3^{-m} + \sum_{k>m} (a_k - b_k) 3^{-k} \geq 2 \times 3^{-m} - \sum_{k>m} 2 \times 3^{-k} = 3^{-m} > 0.$$

Donc Φ est injective. Or l'ensemble $\{0, 2\}^{\mathbb{N}^*}$ est en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$, qui n'est pas dénombrable (théorème de Cantor). Par conséquent, **K n'est pas dénombrable, bien qu'il soit négligeable** : la réciproque de la question a) est fausse.

- e. Supposons que $[\alpha, \beta] \subset K$ avec $\alpha < \beta$. Par croissance de la mesure, $\beta - \alpha = \lambda([\alpha, \beta]) \leq \lambda(K) = 0$, ce qui est absurde. **Donc K ne contient aucun intervalle non trivial : il est d'intérieur vide.**

Barème : a) 1 point ; b) 1 point : 0,5 pour la décroissance, 0,5 pour la mesure ; c) 1 point : 0,5 pour la compacité et la non-vacuité, 0,5 pour la continuité décroissante avec hypothèse de finitude citée ; d) 1 point : 0,5 pour l'appartenance, 0,5 pour l'injectivité et la conclusion ; e) 1 point.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : tribus, mesures et fonctions mesurables

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours [« Tribus et mesures » en L3](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [tribus et mesures](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).