# Corrigé du contrôle de maths L3 : résidus et calcul d'intégrales réelles

**Barème du contrôle**

| Exercice | Points |
|---|---|
| Exercice 1 : Question de cours : singularités et théorème des résidus | 3 points |
| Exercice 2 : Singularités, séries de Laurent et résidus | 4 points |
| Exercice 3 : Intégrale d'une fraction rationnelle sur la droite réelle | 4 points |
| Exercice 4 : Deux autres intégrales réelles | 4 points |
| Exercice 5 : Problème : nombre de zéros par le théorème de Rouché | 5 points |
| **Total** | **20 points** |

## Exercice 1 : Question de cours : singularités et théorème des résidus (3 points)

a. La singularité $a$ est **effaçable** si $c_n = 0$ pour tout $n < 0$. C'est un **pôle d'ordre** $m \geq 1$ si $c_{-m} \neq 0$ et $c_n = 0$ pour tout $n < -m$. C'est une **singularité essentielle** si $c_n \neq 0$ pour une infinité d'indices $n < 0$.

Le résidu de $f$ en $a$ est le coefficient $c_{-1}$ : $\mathrm{Res}(f,a) = c_{-1}$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

b. **Théorème des résidus.** Soit $U$ un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, soient $a_1, \cdots, a_p$ des points de $U$ et $f$ holomorphe sur $U \setminus \{a_1, fs4\ldots\},\}, a_p\}$. Soit $\gamma$ un lacet simple de $U$, orienté dans le sens direct, qui ne passe par aucun $a_k$. Alors :

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2i\pi \sum_{a_k \text{ int[?][?]rieur [?][?] } \gamma} \mathrm{Res}(f, a_k).$$

c. Comme $h(a) = 0$, on peut écrire $h(z) = (z-a)h_1(z)$ avec $h_1$ holomorphe au voisinage de $a$ et $h_1(a) = h'(a) \neq 0$. Ainsi, près de $a$ :

$$\frac{g(z)}{h(z)} = \frac{1}{z-a} \times \frac{g(z)}{h_1(z)}.$$

La fonction $\varphi = g/h_1$ est holomorphe près de $a$, et $\varphi(a) = g(a)/h'(a) \neq 0$. En développant $\varphi$ en série entière, on obtient la série de Laurent de $g/h$ : son seul terme d'indice négatif est $\varphi(a)(z-a)^{-1}$. Donc $a$ est un pôle simple et $\mathrm{Res}(g/h, a) = \frac{g(a)}{h'(a)}$.

*Barème : a) 0,5 point pour les trois définitions, 0,5 point pour le résidu ; b) 1 point (hypothèses sur l'ouvert, le lacet et les points exigées) ; c) 0,5 point pour la factorisation de $h$, 0,5 point pour la conclusion.*

## Exercice 2 : Singularités, séries de Laurent et résidus (4 points)

a. Pour $z \neq 0$, on a $\frac{\sin z}{z} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} - \cdots$. Aucun coefficient d'indice négatif n'est non nul. **Donc $0$ est une singularité effaçable**, et la fonction se prolonge par $1$ en $0$.

Ensuite, pour tout $z \neq 0$, $e^{1/z} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!\, z^n}$. C'est la série de Laurent sur $\mathbb{C}^*$. Tous les coefficients $c_{-n} = \frac{1}{n!}$ sont non nuls. **Donc $0$ est une singularité essentielle de $e^{1/z}$.** Enfin, $\mathrm{Res}(e^{1/z}, 0) = c_{-1} = 1$.

b. **Sur $0 < |z| < 1$.** On écrit $f(z) = -\frac{1}{z} \times \frac{1}{1-z}$. Comme $|z| < 1$, la série géométrique converge :

$$f(z) = -\frac{1}{z} \sum_{n \geq 0} z^n = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - \dots$$

**Sur $|z| > 1$.** Cette fois $|1/z| < 1$. On écrit donc $f(z) = \frac{1}{z^2} \times \frac{1}{1 - 1/z}$, d'où :

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{z^{n+2}} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \dots$$

Les deux développements diffèrent car ils sont valables sur deux couronnes distinctes. En effet, le pôle $1$ les sépare. L'unicité de la série de Laurent ne vaut que sur une couronne donnée.

c. D'abord, $z^2\, e^{1/z} = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{2-n}}{n!}$. L'exposant vaut $-1$ pour $n = 3$. Donc $\mathrm{Res}(z^2 e^{1/z}, 0) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$.

Ensuite, $\frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{(z-i)^2 (z+i)^2}$ a un pôle double en $i$. Le résidu vaut la dérivée en $i$ de $\psi(z) = (z+i)^{-2}$. Or $\psi'(z) = -2(z+i)^{-3}$, donc :

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{(z^2+1)^2},\, i\right) = \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{-2}{-8i} = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}.$$

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

*Barème : a) 0,5 point pour* $\sin z \,/\, z$ *, 0,5 point pour la nature de* $e^{1/z}$ *, 0,5 point pour son résidu ; b) 0,5 point par développement, 0,5 point pour l'explication ; c) 0,5 point par résidu.*

## Exercice 3 : Intégrale d'une fraction rationnelle sur la droite réelle (4 points)

a. La fonction $x \to \frac{1}{1+x^4}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$. De plus, elle est majorée par $\frac{1}{x^4}$ pour $|x| \geq 1$. Par comparaison à une intégrale de Riemann, $I$ **converge**.

Les pôles de $f$ sont les solutions de $z^4 = -1 = e^{i\pi}$, soit $z_k = e^{i(\pi/4 + k\pi/2)}$ pour $k \in \{0,1,2,3\}$. Ce sont des pôles simples, car la dérivée $4z^3$ du dénominateur ne s'annule pas en $z_k$.

Pour $R > 1$, aucun pôle n'est réel ni de module $R$. Les pôles intérieurs à $\gamma_R$ sont ceux du demi-plan supérieur : $z_0 = e^{i\pi/4}$ et $z_1 = e^{3i\pi/4}$.

Par la formule de l'exercice 1 c), et comme $z_k^4 = -1$ :

$$\mathrm{Res}(f, z_k) = \frac{1}{4z_k^3} = \frac{z_k}{4z_k^4} = -\frac{z_k}{4}.$$

b. La fonction $f$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ privé de quatre points, et $\gamma_R$ est un lacet simple direct. Le théorème des résidus donne donc :

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2i\pi \times \left(-\frac{z_0 + z_1}{4}\right).$$

Or $z_0 + z_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = i\sqrt{2}$ . Ainsi, $\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2i\pi \times \frac{-i\sqrt{2}}{4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ .

c. Sur $\Gamma_R$ , on a $|z| = R$. L'inégalité triangulaire donne alors $|1 + z^4| \geq |z|^4 - 1 = R^4 - 1 > 0$. De plus, la longueur de $\Gamma_R$ vaut $\pi R$ . Par l'inégalité de la longueur :

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \leq \pi R \times \frac{1}{R^4 - 1} \quad [R \to +\infty[ 0.$$

Par ailleurs, $\int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} - \int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z$ . Comme $I$ converge, on fait tendre $R$ vers $+\infty$ :

$$I = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

**Donc** $I = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ **.**

**Erreur fréquente :** compter les quatre pôles dans la somme des résidus. Seuls les pôles intérieurs au contour interviennent.

*Barème : a) 0,5 point pour la convergence, 0,5 point pour les pôles intérieurs, 0,5 point pour les résidus ; b) 1 point ; c) 1 point pour la majoration rédigée de l'arc, 0,5 point pour la conclusion.*

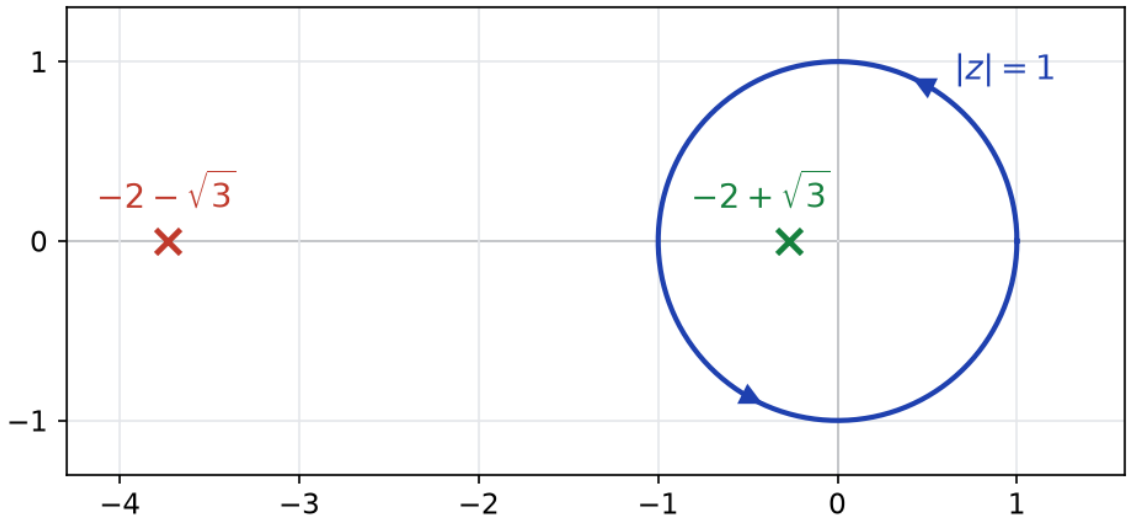
Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

## Exercice 4 : Deux autres intégrales réelles (4 points)

a. Le cercle unité est paramétré par $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Alors $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ et $\mathrm{d}z = iz\,\mathrm{d}\theta$. Par conséquent :

$$J = \int_{|z|=1} \frac{1}{2 + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} \times \frac{\mathrm{d}z}{iz} = \int_{|z|=1} \frac{2}{i} \frac{\mathrm{d}z}{z^2 + 4z + 1}.$$

Les racines de $z^2 + 4z + 1$ sont $z_+ = -2 + \sqrt{3}$ et $z_- = -2 - \sqrt{3}$. Or $|z_+| = 2 - \sqrt{3} < 1$ et $|z_-| = 2 + \sqrt{3} > 1$. Seul $z_+$ est intérieur au cercle.




Le pôle $z_+$ est simple, de résidu $\frac{2}{i} \times \frac{1}{z_+ - z_-} = \frac{2}{i} \times \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{i\sqrt{3}}$. Le théorème des résidus donne alors :

$$J = 2i\pi \times \frac{1}{i\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

**Donc** $J = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. Contrôle : l'intégrande est compris entre $\frac{1}{3}$ et $1$, donc $J$ est entre $\frac{2\pi}{3}$ et $2\pi$.

b. La fonction $g$ a deux pôles simples, $i$ et $-i$. Pour $R > 1$, seul $i$ est intérieur à $\gamma_R$. Par la formule $g(a)/h'(a)$ :

$$\operatorname{Res}(g, i) = \frac{e^{i \times i}}{2i} = \frac{e^{-1}}{2i}, \text{ donc } \int_{\gamma_R} g(z)\,\mathrm{d}z = 2i\pi \times \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}.$$

**Majoration de l'arc.** Pour $z = Re^{it}$ avec $t \in [0, \pi]$, on a $|e^{iz}| = e^{-R\sin t} \leq 1$, car $\sin t \geq 0$. De plus $|z^2 + 1| \geq R^2 - 1$. Ainsi :

$$\left| \int_{\Gamma_R} g(z)\,\mathrm{d}z \right| \leq \pi R \times \frac{1}{R^2 - 1} \xrightarrow{R \to +\infty} 0.$$

Donc $\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ tend vers $\frac{\pi}{e}$. On prend la partie réelle : $\int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \to \frac{\pi}{e}$. Enfin, $K$ converge absolument, car $\frac{|\cos x|}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2+1}$. **Donc** $K = \frac{\pi}{e}$.

**Erreur fréquente :** travailler avec $\frac{\cos z}{z^2+1}$. Cette fonction n'est pas bornée sur le demi-plan supérieur, car $|\cos(iy)| = \operatorname{ch} y$. L'arc ne tend alors pas vers $0$.

*Barème : a) 0,5 point pour le changement de variable, 0,5 point pour le dessin et le pôle intérieur, 1 point pour le résidu et la valeur ; b) 0,5 point pour le résidu, 1 point pour la majoration de l'arc, 0,5 point pour la conclusion.*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

## Exercice 5 : Problème : nombre de zéros par le théorème de Rouché (5 points)

a. **Théorème de Rouché.** Soient $f$ et $g$ holomorphes sur un ouvert contenant le disque fermé $\overline{D}(a,r)$. On suppose que $|f(z)-g(z)|<|f(z)|$ pour tout $z$ du cercle $|z-a|=r$. Alors $f$ et $g$ ont le même nombre de zéros, comptés avec multiplicité, dans le disque ouvert $D(a,r)$.

b. On pose $f(z)=-6z^2$. Alors $P(z)-f(z)=z^5+2$. Pour $|z|=1$, on a :

$$|P(z)-f(z)| \leq |z|^5+2=3<6=|f(z)|.$$

Par le théorème de Rouché, $P$ a autant de zéros que $-6z^2$ dans $D(0,1)$, soit **deux zéros** (le zéro double $0$). De plus, pour $|z|=1$, $|P(z)| \geq |f(z)|-|P(z)-f(z)| \geq 6-3=3$. **Donc $P$ ne s'annule pas sur le cercle unité.**

c. On compare cette fois $P$ à $z^5$. Pour $|z|=2$ :

$$|P(z)-z^5|=|-6z^2+2| \leq 6\times 4+2=26<32=|z^5|.$$

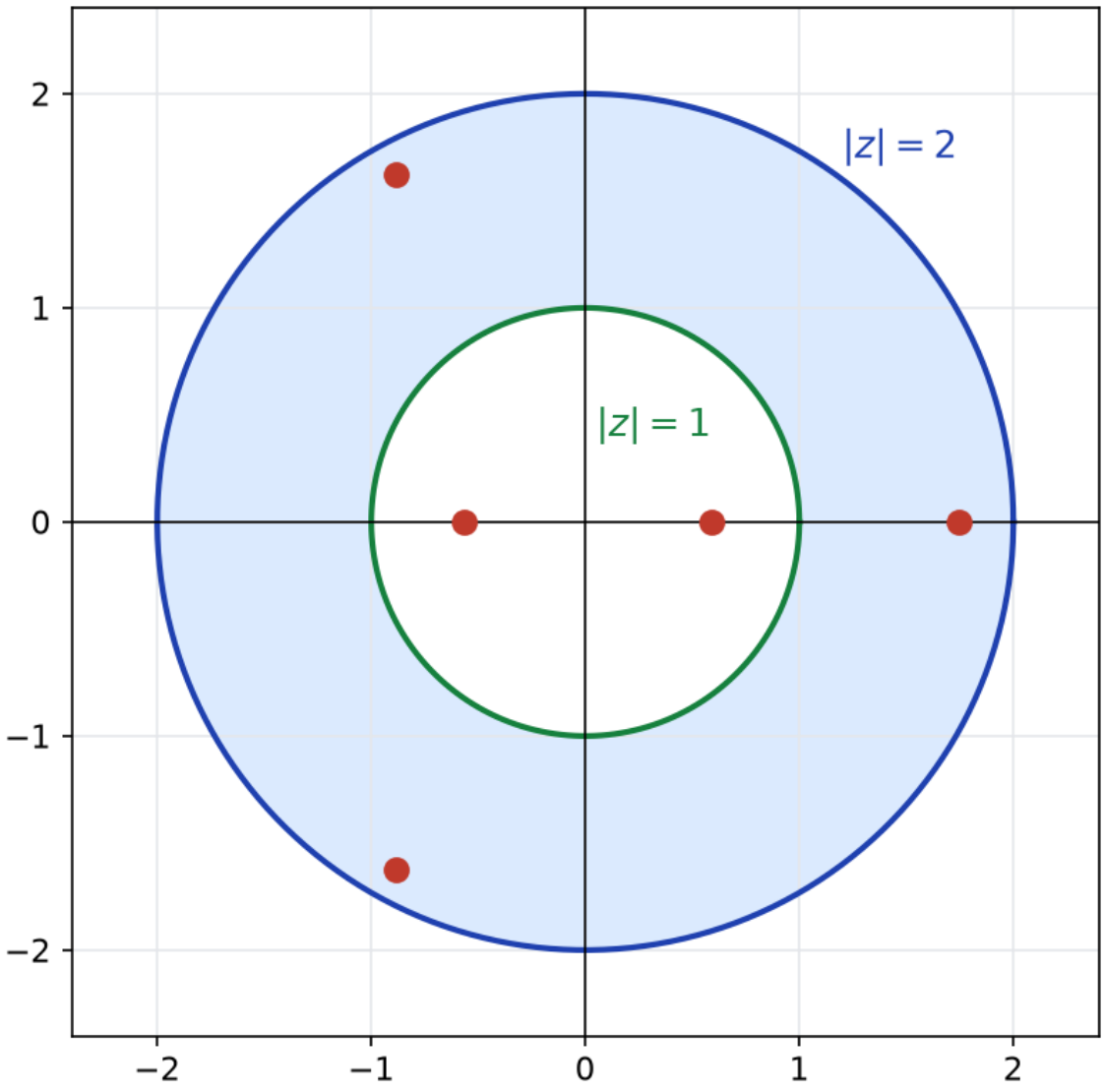
Ainsi $P$ a cinq zéros dans $D(0,2)$, comme $z^5$. Or $P$ est de degré 5 : **tous ses zéros sont dans** $D(0,2)$. Aucun n'est sur le cercle unité, d'après b). **Donc la couronne $1<|z|<2$ contient $5-2=3$ zéros de $P$.**

d. **Zéros du disque unité.** La fonction $P$ est continue sur $\mathbb{R}$. Or $P(-1)=-1-6+2=-5$, $P(0)=2$ et $P(1)=1-6+2=-3$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, $P$ s'annule dans $]-1,0[$ et dans $]0,1[$. Ce sont deux zéros distincts de $D(0,1)$. Comme $D(0,1)$ en contient exactement deux, **ce sont deux zéros réels et simples**.

**Zéros réels de la couronne.** Pour $x \in ]-2,-1[$, on a $x^5 < 0$ et $-6x^2+2 < -4$, donc $P(x) < 0$. Pour $x \in [1,2]$, $P'(x) = 5x^4 - 12x = x(5x^3-12)$. Cette dérivée s'annule en $x_0 = (12/5)^{1/3}$, qui est dans $]1,2[$ car $1 < 12/5 < 8$.

Ainsi $P$ décroît sur $[1,x_0]$ et croît strictement sur $[x_0,2]$. Comme $P(1) = -3$, on a $P<0$ sur $[1,x_0]$. Ensuite, $P(2) = 32-24+2 = 10 > 0$. La stricte monotonie donne donc un seul zéro dans $]x_0,2[$. **La couronne contient donc exactement un zéro réel.**

**Conclusion.** Les deux derniers zéros de la couronne ne sont pas réels. Comme $P$ est à coefficients réels, $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$. Par conséquent, **ces deux zéros sont complexes conjugués, de module compris entre 1 et 2**.




Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

*Barème : a) 1 point (hypothèse d'inégalité stricte sur le cercle exigée) ; b) 1 point pour Rouché sur le cercle unité, 0,5 point pour l'absence de zéro sur le cercle ; c) 0,5 point pour Rouché sur le cercle de rayon 2, 0,5 point pour le décompte dans la couronne ; d) 0,5 point pour les zéros du disque, 0,5 point pour le zéro réel unique de la couronne, 0,5 point pour la conjugaison.*

**Revenir à l'énoncé du contrôle**

## Après le corrigé du contrôle : résidus et calcul d'intégrales réelles

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « Théorème des résidus » en L3 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** théorème des résidus.

Retrouvez tous les **contrôles de maths de L3** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.