

Corrigé du contrôle de maths L3 : réduction de Jordan et décomposition de Dunford

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : unicité de la décomposition de Dunford	3 points
Exercice 2 : Décomposition de Dunford d'une matrice 3×3	5 points
Exercice 3 : Base duale et transposée	3 points
Exercice 4 : Réduction de Jordan d'un nilpotent 4×4	5 points
Exercice 5 : Problème : exponentielle de matrice et système différentiel	4 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : unicité de la décomposition de Dunford (3 points)

- a. **Décomposition de Dunford.** Il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes de E tel que d soit diagonalisable, n nilpotent, $u = d + n$ et $d \circ n = n \circ d$. De plus, d et n sont des polynômes en u . Le résultat vaut sur $\mathbb{C}$, où le polynôme caractéristique est scindé.
- b. Soit v diagonalisable et nilpotent, avec $v^k = 0$. Si $v(x) = \lambda x$ avec $x \neq 0$, alors $\lambda^k x = 0$, donc $\lambda = 0$. Toutes les valeurs propres de v sont nulles. Comme v est diagonalisable, sa matrice dans une base de vecteurs propres est nulle. **Donc** $v = 0$.

Unicité. Supposons $u = d + n = d' + n'$, avec d' diagonalisable, n' nilpotent et

$d' n' = n' d'$. D'abord, d' commute avec $d' + n' = u$, donc avec tout polynôme en u , en particulier avec d et n . De même, n' commute avec d et n .

On a $d - d' = n' - n$. Deux endomorphismes diagonalisables qui commutent sont codiagonalisables, donc $d - d'$ est diagonalisable. Ensuite, si $n^p = n'^p = 0$, la formule du binôme (valable car n et n' commutent) montre que $(n' - n)^{2p} = 0$. Chaque terme contient en effet n'^k avec $k \geq p$ ou n^{2p-k} avec $2p - k \geq p$.

Ainsi $d - d'$ est diagonalisable et nilpotent, donc nul. **Par conséquent** $d = d'$ et $n = n'$.

Barème : a) 1 point (dont 0,5 point pour la commutation) ; b) 0,5 point pour le lemme, 0,5 point pour la commutation avec d et n , 1 point pour la conclusion (codiagonalisation et binôme).

Exercice 2 : Décomposition de Dunford d'une matrice 3×3 (5 points)

a. On remplace la ligne L_2 par $L_2 - L_3$, ce qui ne change pas le déterminant :

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 0 & \frac{2}{1} & \frac{1}{2} \\ -1 & \lambda & -\lambda \end{vmatrix}.$$

On développe ensuite selon la première colonne :

$$\det(A - \lambda I_3) = -\lambda \left[(2 - \lambda)^2 - (\lambda - 1) \right] - \left[2(\lambda - 1) - (2 - \lambda) \right].$$

On obtient $-\lambda(\lambda^2 - 5\lambda + 5) - (3\lambda - 4) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4$. Or $(1 - \lambda)(2 - \lambda)^2 = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4$. **Donc** $\chi_A = (X - 1)(X - 2)^2$.

b. On a $A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & \\ , & 1 & \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Le système se réduit à $-x + 2y + z = 0$ et $-x + y + z = 0$, d'où $y = 0$ et $z = x$. **Donc** $\text{Ker}(A - I_3) = \text{Vect}((1, 0, 1))$.

Ensuite, $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & \\ , & 1 & \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. La troisième ligne donne $y = x$, puis la deuxième donne $z = 0$. **Donc** $\text{Ker}(A - 2I_3) = \text{Vect}((1, 1, 0))$.

Enfin, $(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \\ , & 0 & \\ 1 & -1 & 0,0 \end{pmatrix}$, dont le noyau est défini par $x = y$. **Donc** $\text{Ker}(A - 2I_3)^2 = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 0, 1))$.

La valeur propre 2 est double, mais son sous-espace propre est de dimension 1. **La matrice A n'est donc pas diagonalisable.**

c. On développe : $(X - 2)^2 - (X - 1)(X - 3) = X^2 - 4X + 4 - X^2 + 4X - 3 = 1$.

Par le lemme des noyaux, $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(A - I_3) \oplus \text{Ker}(A - 2I_3)^2$. Posons

$p_1 = (A - 2I_3)^2$ et $p_2 = -(A - I_3)(A - 3I_3)$. La relation de Bézout donne $p_1 + p_2 = I_3$. Par le théorème de Cayley-Hamilton, $(A - I_3)p_1 = \chi_A(A) = 0$ et $(A - 2I_3)^2 p_2 = 0$. Ainsi p_1 est le projecteur sur $\text{Ker}(A - I_3)$ parallèlement à $\text{Ker}(A - 2I_3)^2$, et $p_2 = I_3 - p_1$ est le projecteur associé.

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \\ , & 0 & \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \\ , & 0 & \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La partie diagonalisable vaut $D = 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2$, et $N = A - D$:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \\ , & 0 & \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vérifications. D'abord, D agit par 1 sur $\text{Im } p_1$ et par 2 sur $\text{Im } p_2$: elle est diagonalisable. Ensuite, un calcul direct donne $N^2 = 0$. Enfin, $DN = ND = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2N$.
La décomposition de Dunford de A est donc $A = D + N$.

- d. La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ a deux valeurs propres distinctes : elle est diagonalisable. Sa décomposition de Dunford est donc $M = M + 0$. Les deux matrices proposées ne commutent pas : leurs produits valent $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans un ordre et $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans l'autre. **L'étudiant se trompe : il oublie la condition de commutation.**

Barème : a) 1 point ; b) 1 point pour les trois noyaux, 0,5 point pour la non-diagonalisabilité ; c) 0,5 point pour Bézout et le lemme des noyaux, 0,5 point pour les projecteurs, 1 point pour D et N avec les vérifications ; d) 0,5 point.

Erreur fréquente : prendre pour D la diagonale d'une forme triangulaire de A , sans vérifier que D et N commutent.

Exercice 3 : Base duale et transposée (3 points)

- a. On cherche des polynômes L_b tels que $\varphi_a(L_b) = 1$ si $a = b$ et 0 sinon. Ce sont les polynômes interpolateurs de Lagrange :

$$L_0 = \frac{(X-1)(X-2)}{2}, \quad L_1 = -X(X-2), \quad L_2 = \frac{X(X-1)}{2}.$$

On vérifie par exemple $L_0(0) = \frac{(-1)(-2)}{2} = 1$, $L_1(1) = 1$ et $L_2(2) = 1$, les autres valeurs étant nulles.

Si $c_0 \varphi_0 + c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 = 0$, on applique cette forme à L_b et on obtient $c_b = 0$. La famille est donc libre. Comme $\dim E^* = \dim E = 3$, c'est une base. **Sa base antéduale**

est (L_0, L_1, L_2) .

b. Par définition, ${}^t u([\varphi]_0) = \varphi_0$, c'est-à-dire $P \rightarrow P'(0)$. Dans la base duale, toute forme ψ s'écrit $\psi = \sum_j \psi(L_j) \varphi_j$. On calcule donc les dérivées en 0 :

$$L'_0 = \frac{2X-3}{2}, \text{ donc } L'_0(0) = -\frac{3}{2};$$

$$L'_1 = -2X + 2, \text{ donc } L'_1(0) = 2;$$

$$L'_2 = \frac{2X-1}{2}, \text{ donc } L'_2(0) = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi ${}^t u(\varphi_0) = -\frac{3}{2} \varphi_0 + 2 \varphi_1 - \frac{1}{2} \varphi_2$, soit, pour tout $P \in E$:

$$P'(0) = \frac{-3P(0) + 4P(1) - P(2)}{2}.$$

Contrôle avec $P = X^2$: $\frac{0+4-4}{2} = 0 = P'(0)$.

Barème : a) 0,5 point pour les polynômes de Lagrange, 1 point pour la base et la base antéduale ; b) 0,5 point pour la définition de la transposée, 0,5 point pour les coefficients, 0,5 point pour la formule.

Exercice 4 : Réduction de Jordan d'un nilpotent 4×4 (5 points)

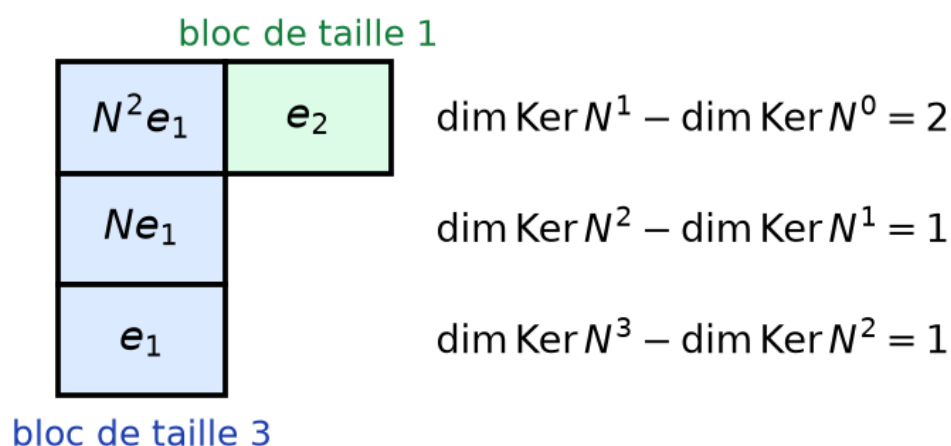
a. Le calcul donne

$$N^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N^3 = 0.$$

D'abord, N est de rang 2 : ses deuxième et quatrième lignes sont indépendantes, la troisième est l'opposée de la deuxième, et la première est l'opposée de la quatrième. Par le théorème du rang, $\dim \text{Ker } N = 2$. On trouve $\text{Ker } N = \text{Vect}(e_2, (-1, 0, -1, 1))$.

Ensuite, N^2 est de rang 1, donc $\dim \text{Ker } N^2 = 3$. Enfin, $\text{Ker } N^3 = \mathbb{R}^4$. **L'indice de nilpotence vaut 3.**

- b. La ligne k du tableau de Young compte $\dim \text{Ker } N^k - \dim \text{Ker } N^{k-1}$ cases, soit 2, puis 1, puis 1. Les colonnes ont pour hauteurs 3 et 1 : ce sont les tailles des blocs de Jordan.



$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La réduite de Jordan est formée d'un bloc de taille 3 et d'un bloc de taille 1.

- c. La première colonne de N^2 montre que $N^2 e_1 = (-1, 1, -1, 1) \neq 0$. Donc

$e_1 \notin \text{Ker } N^2$. On forme la chaîne $v_3 = e_1$, $v_2 = N e_1 = (0, -1, 1, 0)$,
 $v_1 = N^2 e_1 = (-1, 1, -1, 1)$. On a alors $N v_1 = 0$, $N v_2 = v_1$ et $N v_3 = v_2$.

On complète par un vecteur de $\text{Ker } N$ non colinéaire à v_1 : $v_4 = e_2$, car la deuxième colonne de N est nulle. La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est libre. En effet, la matrice P ci-dessous a pour déterminant -1 .

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans la base (v_1, v_2, v_3, v_4) , la matrice de N est J : $N = P J P^{-1}$.

- d. Deux matrices nilpotentes sont semblables si et seulement si elles ont la même réduite de Jordan, c'est-à-dire la même partition de la taille en blocs. Les partitions de 4 sont 4 , $3 + 1$, $2 + 2$, $2 + 1 + 1$ et $1 + 1 + 1 + 1$. **Il y a donc 5 classes de similitude.**

Barème : a) 0,5 point pour les puissances, 1 point pour les dimensions et l'indice ; b) 0,5 point pour le tableau, 0,5 point pour J ; c) 1 point pour la chaîne, 0,5 point pour le complément et P ; d) 1 point.

Exercice 5 : Problème : exponentielle de matrice et système différentiel (4 points)

- a. Les matrices D et N commutent d'après l'exercice 2, donc tD et tN aussi. Or, pour deux matrices qui commutent, l'exponentielle de la somme est le produit des exponentielles. **Donc**
 $\exp(tA) = \exp(tD) \exp(tN)$.

- b. Comme $N^2 = 0$, la série se réduit à deux termes : $\exp(tN) = I_3 + tN$.

Par ailleurs, $p_1 p_2 = p_2 p_1 = 0$ et $p_i^2 = p_i$. Donc $D^k = p_1 + 2^k p_2$ pour $k \geq 1$, et aussi pour $k = 0$ puisque $p_1 + p_2 = I_3$. En sommant la série,

$$\exp(tD) = e^t p_1 + e^{2t} p_2.$$

- c. D'abord, $p_1 N = 0$. En effet, $p_1 N = p_1 A - p_1 D = p_1 A - p_1$, et $A p_1 = p_1$ car $\text{Im } p_1 = \text{Ker}(A - I_3)$. Ensuite, $p_2 N = N - p_1 N = N$. Par conséquent :

$$\exp(tA) = (e^t p_1 + e^{2t} p_2)(I_3 + tN) = e^t p_1 + e^{2t} (p_2 + tN).$$

Avec $p_2 + tN = \begin{pmatrix} -t & 1+t & t \\ -t & 1+t & t \\ , & t & \\ -, -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient :

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} e^t - t e^{2t} & -e^t + (1+t) e^{2t} & t e^{2t} \\ -t e^{2t} & (1+t) e^{2t} & t e^{2t} \\ e^t - t e^{2t} & t e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Contrôle : pour $t = 0$, on retrouve bien I_3 .

- d. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, l'unique solution est $X(t) = \exp(tA) X(0)$, c'est-à-dire la troisième colonne de $\exp(tA)$. **Donc** $X(t) = (t e^{2t}, t e^{2t}, e^{2t})$.

Vérification. On a $X'(t) = ((1+2t) e^{2t}, (1+2t) e^{2t}, 2e^{2t})$. De plus, la première ligne de $A X(t)$ vaut $2t e^{2t} + e^{2t}$. La deuxième vaut $-t e^{2t} + 3t e^{2t} + e^{2t} = (1+2t) e^{2t}$. La troisième vaut $-t e^{2t} + t e^{2t} + 2e^{2t} = 2e^{2t}$. On retrouve bien $X'(t) = A X(t)$, avec $X(0) = (0, 0, 1)$.

Barème : a) 1 point (commutation citée) ; b) 0,5 point pour $\exp(tN)$, 0,5 point pour $\exp(tD)$; c) 1 point ; d) 0,5 point pour la solution, 0,5 point pour la vérification.

Erreur fréquente : écrire $\exp(tA) = \exp(tD) \exp(tN)$ avec une décomposition dont les termes ne commutent pas, ce qui donne un résultat faux.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : réduction de Jordan et décomposition de Dunford

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Réduction de Jordan](#) » en L3 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [réduction de jordan](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).