Corrigé du contrôle de maths L3 : partiel final : intégration et probabilités

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : convergence dominée et continuité	3,5 points
Exercice 2 : Passages à la limite dans une espérance	4 points
Exercice 3 : La loi de Cauchy	4 points
Exercice 4 : Fubini-Tonelli et queue de distribution	3,5 points
Exercice 5 : Problème : méthode de Monte-Carlo et intervalle de confiance	5 points
Total	**20 points**

Exercice 1 : Question de cours : convergence dominée et continuité (3,5 points)

a. **Théorème de convergence dominée.** Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que $f_n(x) \to f(x)$ pour μ-presque tout x. On suppose aussi qu'il existe g intégrable telle que $|f_n| \leq g$ presque partout, pour tout n. Alors f est intégrable et :

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$$\int_E |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \to 0, \text{ donc } \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu \to \int_E f \, \mathrm{d}\mu.$$

b. **Dérivation sous le signe intégrale.** Soit J un intervalle ouvert et $f : J \times E \to \mathbb{R}$. On suppose :

- pour tout $s \in J$, $x \to f(s,x)$ est intégrable ;
- pour presque tout x, $s \to f(s,x)$ est dérivable sur J ;
- il existe g intégrable telle que $\left|\partial_s f(s,x)\right| \leq g(x)$ pour tout $s \in J$ et presque tout x.

Alors F est dérivable sur J et $F'(s) = \int_E \partial_s f(s,x) \, \mathrm{d}\mu(x)$.

c. Soit $t \in \mathbb{R}$ et (t_n) une suite qui tend vers t. Pour tout ω, $e^{it_n X(\omega)} \to e^{itX(\omega)}$, par continuité de l'exponentielle. De plus, $\left|e^{it_n X}\right| = 1$, et la constante 1 est intégrable sur l'espace probabilisé, de mesure totale 1.

Le théorème de convergence dominée donne donc $\varphi_X(t_n) \to \varphi_X(t)$. Par la caractérisation séquentielle de la continuité, φ_X **est continue en tout point** t.

Barème : a) 1 point (domination indépendante de n exigée) ; b) 1 point ; c) 0,5 point pour la convergence simple, 0,5 point pour la domination, 0,5 point pour la conclusion séquentielle.

Exercice 2 : Passages à la limite dans une espérance (4 points)

a. Pour $x \geq 0$, on pose $h_n(x) = n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$. D'abord, $\ln(1+u) \sim u$ en 0, donc $h_n(x) \to x$. Ensuite, l'inégalité $\ln(1+u) \leq u$ pour $u \geq 0$ donne $0 \leq h_n(x) \leq x$.

Ainsi $h_n(X) \to X$ partout, et $|h_n(X)| \leq X$, qui est intégrable et ne dépend pas de n. Par convergence dominée, $n\,\mathbb{E}\left[\ln\left(1+\frac{X}{n}\right)\right] = \mathbb{E}[h_n(X)] \to \mathbb{E}[X]$.

b. Pour $x \geq 0$, $\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-h_n(x)\right) \to e^{-x}$ d'après a). De plus, cette quantité est comprise entre 0 et 1. La constante 1 est intégrable, car $\mathbb{P}$ est une probabilité. Par convergence dominée, **la limite vaut** $\mathbb{E}[e^{-X}]$.

Si X suit la loi uniforme sur $[0,2]$: $\mathbb{E}[e^{-X}] = \frac{1}{2}\int_0^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x$. **La limite vaut donc** $\frac{1-e^{-2}}{2}$.

c. **Continuité.** Soit $s_n \to s$ dans $[0,+\infty[$. Alors $e^{-s_n X} \to e^{-sX}$ partout, et $0 \leq e^{-s_n X} \leq 1$. Par convergence dominée, $L(s_n) \to L(s)$. **Donc** L **est continue sur** $[0,+\infty[$.

Dérivabilité. Soit $a > 0$. On travaille sur $J =]a,+\infty[$. Pour tout $x \geq 0$, $s \to e^{-sx}$ est dérivable, de dérivée $-xe^{-sx}$. Or, pour $s > a$:

$$\left|-xe^{-sx}\right| \leq xe^{-ax} \leq \frac{1}{ea},$$

car la fonction $x \to xe^{-ax}$ atteint son maximum $\frac{1}{ea}$ en $x = \frac{1}{a}$. Cette constante est intégrable sur l'espace probabilisé. Par dérivation sous le signe intégrale, L est dérivable sur $]a,+\infty[$. Comme $a > 0$ est arbitraire, L **est dérivable sur** $]0,+\infty[$ **et** $L'(s) = -\mathbb{E}[Xe^{-sX}]$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Erreur fréquente : dominer par X pour la dérivée. C'est inutile sur $]a, +\infty[$, et impossible si X n'est pas intégrable. La domination doit être uniforme en s sur un intervalle, d'où le recours à $a > 0$.

Barème : a) 0,5 point pour la limite simple, 0,5 point pour la domination, 0,5 point pour la conclusion ; b) 0,5 point pour le passage à la limite, 0,5 point pour le calcul ; c) 0,5 point pour la continuité, 1 point pour la dérivabilité avec domination locale.

Exercice 3 : La loi de Cauchy (4 points)

a. On a $\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(tx) + i\sin(tx)}{\pi(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$, les deux intégrales convergeant absolument. La partie en sinus est nulle, car son intégrande est impaire. Avec l'intégrale admise, $\varphi_X(t) = \frac{1}{\pi} \times \pi\, e^{-|t|} = e^{-|t|}$.

En revanche, $\frac{|x|}{\pi(1+x^2)} \sim \frac{1}{\pi|x|}$ en $\pm\infty$, qui n'est pas intégrable. Donc $\mathbb{E}[|X|] = +\infty$: X **n'est pas intégrable**.

b. Par indépendance, la fonction caractéristique d'une somme est le produit des fonctions caractéristiques. Donc, pour tout réel t :

$$\varphi_{\overline{X}_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}\left(\frac{t}{n}\right) = \left(e^{-|t|/n}\right)^n = e^{-|t|}.$$

La fonction caractéristique caractérise la loi. **Donc $\overline{X}_n$ suit encore la loi de Cauchy, pour tout n.**

Supposons que $\overline{X}_n \to c$ en probabilité, pour une constante c. Alors $\overline{X}_n \to c$ en loi, et le théorème de Lévy donne $e^{-|t|} \to e^{itc}$. C'est absurde : pour $t \neq 0$, $e^{-|t|} < 1 = |e^{itc}|$.

Donc $\overline{X}_n$ ne converge en probabilité vers aucune constante.

Cela ne contredit pas la loi des grands nombres. En effet, celle-ci suppose que X_1 est **intégrable**, ce qui est faux ici.

c. La variable X est non nulle presque sûrement. Soit h mesurable positive. Par le théorème de transfert :

$$\mathbb{E}\left[h\left(\frac{1}{X}\right)\right] = \int_{-\infty}^{0} h\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\pi(1+x^2)} + \int_{0}^{+\infty} h\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\pi(1+x^2)}.$$

Sur $]0,+\infty[$, l'application $x \to \frac{1}{x}$ est un C^1-difféomorphisme. On pose $y = \frac{1}{x}$, d'où $|\mathrm{d}x| = \frac{\mathrm{d}y}{y^2}$. Ainsi :

$$\int_{0}^{+\infty} h\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\pi(1+x^2)} = \int_{0}^{+\infty} h(y)\frac{1}{\pi\left(1+\frac{1}{y^2}\right)}\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int_{0}^{+\infty}\frac{h(y)}{\pi(1+y^2)}\,\mathrm{d}y.$$

Le même calcul vaut sur $]-\infty,0[$. Donc $\mathbb{E}\left[h\left(\frac{1}{X}\right)\right] = \int_{\mathbb{R}}\frac{h(y)}{\pi(1+y^2)}\,\mathrm{d}y$. **Ainsi $\frac{1}{X}$ suit la loi de Cauchy.**

Barème : a) 0,5 point pour φ_X, 0,5 point pour la non-intégrabilité ; b) 0,5 point pour la loi de $\overline{X}_n$, 0,5 point pour l'absence de convergence, 0,5 point pour l'hypothèse manquante ; c) 0,5 point pour la fonction muette, 1 point pour le changement de variable sur chaque demi-droite.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Exercice 4 : Fubini-Tonelli et queue de distribution (3,5 points)

a. Pour tout ω, on écrit $X(\omega) = \int_0^{+\infty} 1_{\{t < X(\omega)\}}\,\mathrm{d}t$. La fonction $(\omega, t) \to 1_{\{t < X(\omega)\}}$ est mesurable et positive sur $\Omega \times [0, +\infty[$. En effet, l'ensemble $\{(\omega,t) : X(\omega) - t, t > 0\}$ est mesurable pour la tribu produit.

Le **théorème de Fubini-Tonelli** permet alors d'échanger les intégrales, sans hypothèse d'intégrabilité, dans $[0, +\infty]$:

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega \int_0^{+\infty} 1_{\{t < X\}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)\,\mathrm{d}t.$$

b. De même, $X^2 = \int_0^X 2t\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} 2t\,1_{\{t < X\}}\,\mathrm{d}t$. La fonction intégrée est encore mesurable et positive. Par le théorème de Fubini-Tonelli, $\mathbb{E}[X^2] = \int_0^{+\infty} 2t\,\mathbb{P}(X > t)\,\mathrm{d}t$.

c. D'après a) :

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^3} = \left[-\frac{1}{2(1+t)^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

D'après b), en écrivant $t = (1+t) - 1$:

$$\mathbb{E}[X^2] = 2\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{(1+t)^3}\right)\mathrm{d}t = 2\left(1-\frac{1}{2}\right) = 1.$$

Donc $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2}$, $\mathbb{E}[X^2] = 1$ **et** $\mathrm{Var}(X) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Barème : a) 0,5 point pour l'écriture intégrale de X *, 0,5 point pour la mesurabilité et la positivité, 0,5 point pour Fubini-Tonelli ; b) 1 point ; c) 0,5 point pour* $\mathbb{E}[X]$ *, 0,5 point pour* $\mathbb{E}[X^2]$ *et la variance.*

Exercice 5 : Problème : méthode de Monte-Carlo et intervalle de confiance (5 points)

a. **Loi forte des grands nombres.** Si (Y_k) est une suite de variables **indépendantes, de même loi et intégrables**, alors $\frac{Y_1 + \ldots + Y_n}{n} \to \mathbb{E}[Y_1]$ presque sûrement.

Les $G_k = g(U_k)$ sont indépendantes et de même loi, comme images des U_k par une même fonction mesurable. Elles sont bornées par 4, donc intégrables. Enfin, par le théorème de transfert, $\mathbb{E}[G_1] = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \pi$. **Donc** $I_n \to \pi$ **presque sûrement.**

b. On pose $x = \tan\theta$, avec $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Alors $\mathrm{d}x = (1+\tan^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$ et $\frac{1}{1+\tan^2\theta} = \cos^2\theta$. Donc :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \int_0^{\pi/4} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$$

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

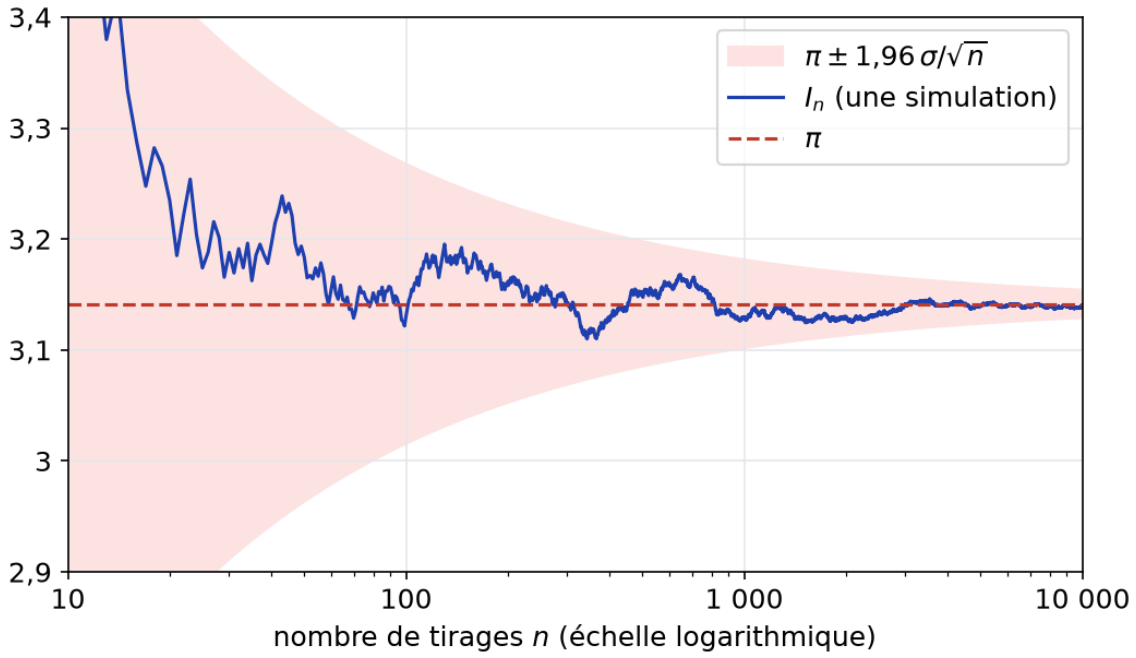
Ainsi $\mathbb{E}\left[G_1^2\right] = 16\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\right) = 2\pi + 4$. **Donc**
$\sigma^2 = \mathbb{E}\left[G_1^2\right] - \pi^2 = 2\pi + 4 - \pi^2 \approx 0{,}4136$ **.**

c. Les G_k sont indépendantes, de même loi, de carré intégrable et de variance $\sigma^2 > 0$. Le théorème central limite donne $\frac{\sqrt{n}(I_n - \pi)}{\sigma} \to \mathcal{N}(0,1)$ en loi. Comme Φ est continue, on obtient :

$$\mathbb{P}\left(\pi \in \left[I_n - \frac{1{,}96\,\sigma}{\sqrt{n}}\,;\, I_n + \frac{1{,}96\,\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) \to 2\Phi(1{,}96) - 1 \approx 0{,}95.$$

C'est un intervalle de confiance asymptotique de niveau $95\,\%$ **.**

En pratique, σ est inconnu, car il dépend de π. On le remplace par l'écart type empirique $s_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} G_k^2 - I_n^2}$. Par la loi forte des grands nombres appliquée aux G_k et aux G_k^2, $s_n \to \sigma$ presque sûrement. Ensuite, le lemme de Slutsky montre que $\frac{\sqrt{n}(I_n - \pi)}{s_n}$ converge encore en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$. L'intervalle $\left[I_n \pm \frac{1{,}96\,s_n}{\sqrt{n}}\right]$ est donc aussi de niveau asymptotique $95\,\%$.



d. Pour $n = 10\,000$, $\sqrt{n} = 100$ et $\sigma \approx 0{,}6431$. La demi-largeur vaut donc $\frac{1{,}96 \times 0{,}6431}{100} \approx 0{,}0126$. **On obtient π à environ $0{,}013$ près, avec une confiance d'environ $95\,\%$.**

Pour le second estimateur, $\mathbb{E}\left[4\sqrt{1-U_1^2}\right] = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = 4 \times \frac{\pi}{4} = \pi$, aire du quart de disque unité. De plus, $\mathbb{E}\left[16(1-U_1^2)\right] = 16\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{3}$. Sa variance vaut donc $\sigma'^2 = \frac{32}{3} - \pi^2 \approx 10{,}6667 - 9{,}8696 = 0{,}7971$.

La largeur de l'intervalle est proportionnelle à $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Pour une même précision, le nombre de tirages est donc proportionnel à la variance. Or $\frac{0{,}7971}{0{,}4136} \approx 1{,}93$. **Le second estimateur demande environ $1{,}9$ fois plus de tirages, soit près de $19\,300$ au lieu de $10\,000$: la première méthode est préférable.**

Barème : a) 0,5 point pour l'énoncé, 0,5 point pour la vérification des hypothèses ; b) 1 point pour l'intégrale, 0,5 point pour σ^2 ; c) 1 point pour l'intervalle, 0,5 point pour l'estimation de σ ; d) 0,5 point pour la demi-largeur, 0,5 point pour la comparaison.

Revenir à l'énoncé du contrôle

Après le corrigé du contrôle : partiel final : intégration et probabilités

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « Intégrale de Lebesgue » en L3 et « Variables aléatoires et espérance » en L3 et « Loi des grands nombres et TCL » en L3 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** intégrale de lebesgue, variables aléatoires et espérance, loi des grands nombres et tcl.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Retrouvez tous les **contrôles de maths de L3** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.

Autres contrôles de maths de L3 sur ce thème

- Contrôle de maths L3 : convergence monotone et lemme de Fatou
- Contrôle de maths L3 : convergence dominée et intégrales à paramètre
- Contrôle de maths L3 : loi d'un vecteur aléatoire et indépendance
- Contrôle de maths L3 : modes de convergence, Borel-Cantelli et TCL