

Corrigé du contrôle de maths L3 : partiel de topologie des espaces normés

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Questions de cours, dimension finie et théorème de Riesz	5 points
Exercice 2 : Compacité dans l'espace des suites bornées	4 points
Exercice 3 : Problème, points fixes et parties de $M_n(\mathbb{R})$	11 points
Total	20 points

Exercice 1 : Questions de cours, dimension finie et théorème de Riesz (5 points)

a. **Majoration.** Pour $x = \sum x_i e_i$, l'inégalité triangulaire donne

$$N(x) \leq \sum |x_i| N(e_i) \leq C \|x\|_\infty \text{ avec } C = \sum_{i=1}^d N(e_i) > 0.$$

Continuité de N . Pour $x, y \in E$, $|N(x) - N(y)| \leq N(x - y) \leq C \|x - y\|_\infty$: N est lipschitzienne, donc continue sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

Minoration. La sphère $S = \{x : \|x\|_\infty = 1\}$ est fermée (image réciproque de $\{1\}$ par la norme, continue), bornée et non vide : elle est compacte. La fonction continue N y atteint son minimum $\alpha = N(x_0)$ en un point $x_0 \in S$, et $\alpha > 0$ car $x_0 \neq 0$. Pour $x \neq 0$, $\frac{x}{\|x\|_\infty} \in S$, donc $N\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right) \geq \alpha$, soit $N(x) \geq \alpha \|x\|_\infty$, inégalité vraie aussi pour

$$x = 0.$$

Ainsi $\alpha \cdots_\infty \leq N \leq C \cdots_\infty$: **N est équivalente à $\alpha \cdots_\infty$** . L'équivalence des normes étant une relation d'équivalence (en particulier transitive), **deux normes quelconques sur E sont équivalentes**.

- b. **Théorème de Riesz.** Un espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte.

Preuve du sens demandé. Supposons E de dimension infinie. Soit u_1 un vecteur de norme 1. Supposons construits $u_1, \dots, u_k$ de norme 1. Le sous-espace $F_k = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ est de dimension finie, donc complet (d'après a), il suffit de le vérifier pour la norme $\alpha \cdots_\infty$ dans une base, et une suite de Cauchy a alors des coordonnées de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc fermé dans E ; et $F_k \neq E$ puisque E est de dimension infinie. Le lemme de Riesz fournit u_{k+1} de norme 1 avec $d(u_{k+1}, F_k) \geq \frac{1}{2}$, donc $|u_{k+1} - u_j| \geq \frac{1}{2}$ pour $j \leq k$. La suite (u_k) de la boule unité fermée vérifie $|u_p - u_q| \geq \frac{1}{2}$ pour $p \neq q$: aucune de ses sous-suites n'est de Cauchy, donc aucune ne converge. **La boule unité fermée n'est pas compacte.**

Barème : a) 3 points : 0,5 pour la majoration, 0,5 pour la continuité de N , 1,5 pour la minoration par compacité de la sphère, 0,5 pour la conclusion ; b) 2 points : 0,5 pour l'énoncé, 1 point pour la construction de la suite (fermeture de F_k justifiée), 0,5 pour la conclusion.

Exercice 2 : Compacité dans l'espace des suites bornées (4 points)

- a. Les suites $e^{(p)}$ sont de norme 1 et, pour $p \neq q$, $|e^{(p)} - e^{(q)}|_\infty = 1$. Une sous-suite convergente serait de Cauchy, ce qui est impossible. **La boule unité fermée de ℓ^∞ n'est pas compacte**, conformément au théorème de Riesz puisque ℓ^∞ est de dimension infinie.
- b. Soit $(x^{(p)})_p$ une suite de K . Pour chaque n , la suite réelle $(x_n^{(p)})_p$ est à valeurs dans le segment $\left[-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right]$.

Extraction diagonale. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une extraction φ_0 telle que $(x_0^{(\varphi_0(p))})_p$ converge ; puis une extraction φ_1 telle que $(x_1^{(\varphi_0 \circ \varphi_1(p))})_p$ converge,

et ainsi de suite. On pose $\psi(p) = \varphi_0 \circ \varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_p(p)$, qui est strictement croissante. Pour n fixé, $(\psi(p))_{p \geq n}$ est extraite de $\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_n$, donc $x_n^{(\psi(p))} \rightarrow y_n$, avec $|y_n| \leq \frac{1}{n+1}$ par passage à la limite. La suite $y = (y_n)$ appartient donc à K .

Convergence en norme. Soit $\varepsilon > 0$ et N tel que $\frac{2}{N+1} \leq \varepsilon$. Pour $n \geq N$, $|x_n^{(\psi(p))} - y_n| \leq \frac{2}{n+1} \leq \varepsilon$ pour tout p . Pour les N indices $n < N$, il existe un rang P tel que $|x_n^{(\psi(p))} - y_n| \leq \varepsilon$ dès que $p \geq P$. Donc $|x^{(\psi(p))} - y|_\infty \leq \varepsilon$ pour $p \geq P$. **Toute suite de K admet une sous-suite convergente dans K : K est compact.**

c. Soit $x \in K$ et $r > 0$. Choisissons n tel que $\frac{1}{n+1} < \frac{r}{2}$, et posons $z = x + \frac{r}{2}e^{(n)}$ si $x_n \geq 0$, $z = x - \frac{r}{2}e^{(n)}$ sinon. Alors $|z - x|_\infty = \frac{r}{2} < r$ et $|z_n| = |x_n| + \frac{r}{2} > \frac{1}{n+1}$, donc $z \notin K$. Aucune boule ouverte n'est incluse dans K : **K est d'intérieur vide.**

Barème : a) 1 point ; b) 2 points : 1 point pour l'extraction diagonale, 1 point pour la convergence en norme $\|\cdot\|_\infty$ (découpage en $n < N$ et $n \geq N$) ; c) 1 point.

Erreur fréquente : s'arrêter à la convergence de chaque coordonnée : elle ne suffit pas, il faut la convergence uniforme en n , obtenue ici grâce à la majoration $\frac{2}{n+1}$.

Exercice 3 : Problème, points fixes et parties de $M_n(\mathbb{R})$ (11 points)

Partie A.

a. La fonction $x \rightarrow x^2$ envoie $[0,1]$ dans $[0,1]$; par composition de fonctions continues, $\Phi(f)$ est continue, donc $\Phi(f) \in E$. Par l'inégalité des accroissements finis, $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$, d'où, pour tout x ,

$$|\Phi(f)(x) - \Phi(h)(x)| \leq \frac{1}{2}|f(x^2) - h(x^2)| \leq \frac{1}{2}N_\infty(f - h).$$

Φ est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne.

- b. Φ est une contraction de l'espace complet E dans lui-même ; par le théorème du point fixe de Banach-Picard, **l'équation admet une unique solution** f^* , limite de toute suite

$f_{n+1} = \Phi(f_n)$, en particulier pour $f_0 = 0$. En $x = 0$, $y = f^*(0)$ vérifie $y = \frac{1}{2} \sin y$; comme $|\sin y| \leq |y|$, on a $|y| \leq \frac{|y|}{2}$, donc $f^*(0) = 0$.

- c. Pour $x \in [0,1]$, $\delta_x : f \rightarrow f(x)$ est continue ($|f(x)| \leq N_\infty(f)$), et

$G = \bigcap_x \delta_x^{-1}\left(\left[0, \frac{3}{2}\right]\right)$ est une intersection de fermés : **G est fermé**. Si $f \in G$, alors

$f(x^2) \in \left[0, \frac{3}{2}\right] \subset [0, \pi]$, donc $\sin f(x^2) \geq 0$ et $x \leq \Phi(f)(x) \leq x + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}$:

$\Phi(G) \subset G$. Comme $f_0 = 0 \in G$, tous les f_n sont dans G , et leur limite f^* aussi puisque G est fermé. En appliquant l'encadrement précédent à $f = f^* \in G$:

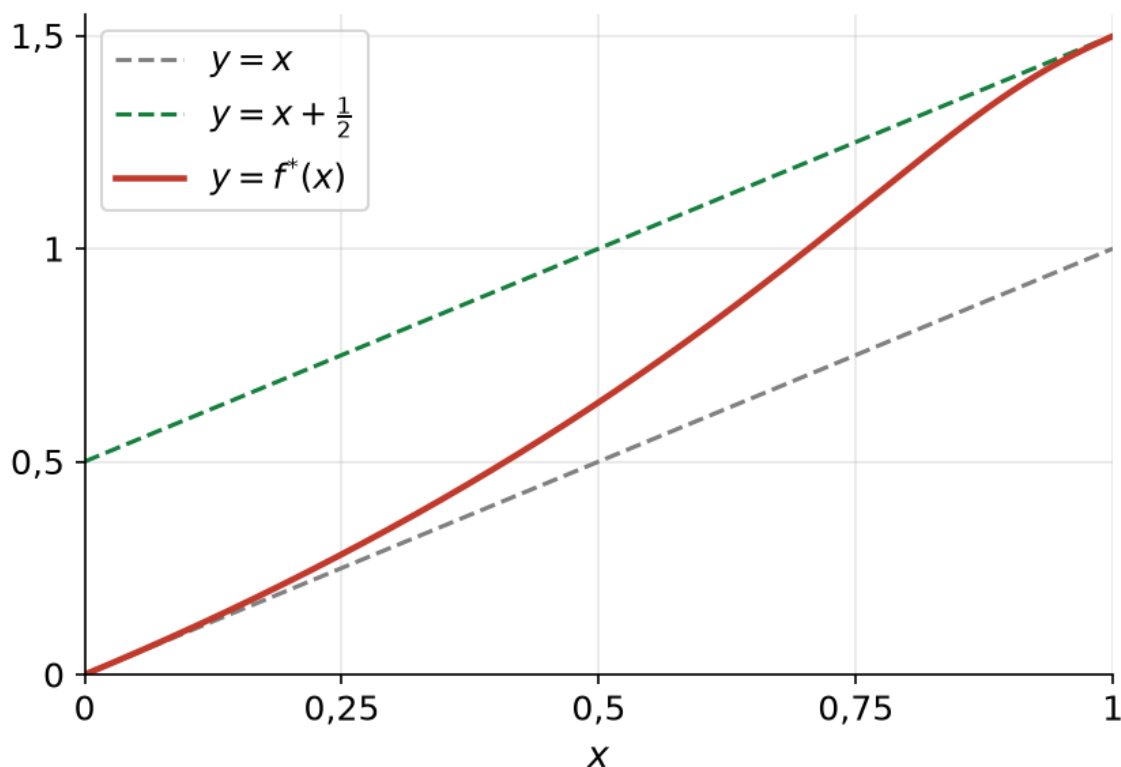
$$x \leq f^*(x) = \Phi(f^*)(x) \leq x + \frac{1}{2}.$$

- d. L'ensemble des fonctions croissantes est $\bigcap_{x \leq y} \{f : f(y) - f(x) \geq 0\}$, intersection de fermés

; donc H est fermé, et $0 \in H$. Soit $f \in H$ et $x \leq y$ dans $[0,1]$. Alors $x^2 \leq y^2$,

donc $0 \leq f(x^2) \leq f(y^2) \leq \frac{3}{2} < \frac{\pi}{2}$; le sinus étant croissant sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$\sin f(x^2) \leq \sin f(y^2)$, et $\Phi(f)(x) \leq \Phi(f)(y)$. Avec c), $\Phi(H) \subset H$. La suite (f_n) reste dans le fermé H , donc $f^* \in H$: **f^* est croissante**.



- e. On a $f_1 = \Phi(0) = x \rightarrow x$, donc $N_\infty(f_1 - f_0) = 1$, et l'estimation du point fixe avec $k = \frac{1}{2}$ donne

$$N_\infty(f_n - f^*) \leq \frac{k^n}{1-k} N_\infty(f_1 - f_0) = 2^{1-n}.$$

Il suffit que $2^{n-1} \geq 100$, soit $n-1 \geq 7$ (car $2^6 = 64$ et $2^7 = 128$). **À partir de $n = 8$, $N_\infty(f_n - f^*) \leq 10^{-2}$.**

Partie B.

- f. La boule $F = \overline{B}\left(0, \frac{1}{4}\right)$ est fermée dans l'espace complet $M_n(\mathbb{R})$, donc complète. Posons

$\Psi(X) = B + X^2$. Pour $X \in F$, la norme étant sous-multiplicative,

$$\|\Psi(X)\| \leq \frac{1}{8} + \|X\|^2 \leq \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16} \leq \frac{1}{4} : \Psi(F) \subset F. \text{ Pour } X, Y \in F, \\ X^2 - Y^2 = X(X - Y) + (X - Y)Y, \text{ donc}$$

$$\|\Psi(X) - \Psi(Y)\| \leq (\|X\| + \|Y\|)\|X - Y\| \leq \frac{1}{2}\|X - Y\|.$$

Ψ est une contraction du complet F : **l'équation $X = B + X^2$ a une unique solution $X(B)$ dans F .**

- g. Notons $X = X(B)$ et $X' = X(B')$. Alors $X - X' = (B - B') + (X^2 - X'^2)$ et, comme en f), $\|X^2 - X'^2\| \leq \frac{1}{2}\|X - X'\|$. D'où

$$\|X - X'\| \leq \|B - B'\| + \frac{1}{2}\|X - X'\|, \text{ soit } \|X - X'\| \leq 2\|B - B'\|.$$

L'application $B \rightarrow X(B)$ est donc continue. La boule $\overline{B}\left(0, \frac{1}{8}\right)$ est convexe, donc connexe par arcs (par les segments), et l'image continue d'un connexe par arcs est connexe par arcs :

l'ensemble des $X(B)$ est connexe par arcs.

- h. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Le polynôme $\lambda \rightarrow \det(A - \lambda I_n)$ est de degré n , donc a un nombre fini de racines. Pour p assez grand, $\frac{1}{p}$ n'en est pas une, et $A_p = A - \frac{1}{p}I_n \in GL_n(\mathbb{R})$. Comme $\|A_p - A\| = \frac{1}{p} \rightarrow 0$, **A est limite d'une suite de matrices inversibles : $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.**

- i. $\mathcal{S}$ est l'image réciproque du fermé $\{I_n\}$ par l'application continue $A \rightarrow A^2$: **$\mathcal{S}$ est fermé.** Si $A \in \mathcal{S}$, A annule $X^2 - 1 = (X - I)(X + I)$, polynôme scindé à racines simples : A est diagonalisable, semblable à $\text{diag}(I_p, -I_q)$ avec $p + q = n$. Donc $\text{tr } A = p - q = n - 2q$ avec $0 \leq q \leq n$. La trace est linéaire, donc continue. Si $\mathcal{S}$ était connexe, $\text{tr}(\mathcal{S})$ serait un intervalle contenant $\text{tr}(I_n) = n$ et $\text{tr}(-I_n) = -n$, donc

$n - 1$, qui n'est pas de la forme $n - 2q$ avec q entier. S **n'est pas connexe** ; la trace sépare même S en $n + 1$ parties ouvertes et fermées non vides.

Barème : Partie A : a) 1,5 point : 0,5 pour $\Phi(f) \in E$, 1 point pour le caractère lipschitzien ; b) 1 point : 0,5 pour le théorème cité avec ses hypothèses, 0,5 pour $f^*(0)$; c) 1,5 point : 0,5 pour le fermé, 0,5 pour la stabilité, 0,5 pour l'encadrement ; d) 1 point ; e) 1 point. Partie B : f) 1,5 point : 0,5 pour la complétude de la boule, 0,5 pour la stabilité, 0,5 pour la contraction ; g) 1 point : 0,5 pour l'inégalité, 0,5 pour la connexité ; h) 1 point ; i) 1,5 point : 0,25 pour le fermé, 0,75 pour la trace, 0,5 pour la non-connexité.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : partiel de topologie des espaces normés

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Espaces vectoriels normés](#) » en L3 et « [Compacité et connexité](#) » en L3 et « [Complétude et point fixe](#) » en L3 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [espaces vectoriels normés](#), [compacité et connexité](#), [complétude et point fixe](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L3 sur ce thème

- [Contrôle de maths L3 : normes équivalentes et norme subordonnée](#)
- [Contrôle de maths L3 : compacité, théorème de Heine et connexité](#)
- [Contrôle de maths L3 : complétude, espaces de Banach et point fixe](#)