

Corrigé du contrôle de maths L3 : normes équivalentes et norme subordonnée

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours, applications linéaires continues	4 points
Exercice 2 : Trois normes sur $C([0,1])$	4 points
Exercice 3 : Calculs de normes subordonnées	4 points
Exercice 4 : Formes linéaires sur les polynômes	3 points
Exercice 5 : Problème, l'opérateur de Volterra	5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours, applications linéaires continues (4 points)

a. (i) $\Rightarrow$ (ii) est immédiat.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Par continuité en 0 avec $\varepsilon = 1$ (et $u(0) = 0$), il existe $\eta > 0$ tel que $|y|_E \leq \eta \Rightarrow |u(y)|_F \leq 1$. Soit $x \neq 0$; le vecteur $y = \frac{\eta}{|x|_E}x$ vérifie $|y|_E = \eta$, donc $|u(y)|_F \leq 1$. Par linéarité, $u(y) = \frac{\eta}{|x|_E}u(x)$, d'où $|u(x)|_F \leq \frac{1}{\eta}|x|_E$. Cette inégalité est vraie aussi pour $x = 0$: (iii) est vérifiée avec $C = \frac{1}{\eta}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Pour $x, y \in E$, la linéarité donne

$|u(x) - u(y)|_F = |u(x - y)|_F \leq C|x - y|_E : u$ est C -lipschitzienne, donc continue sur E .

b. Pour $x \neq 0$, posons $y = \frac{x}{|x|_E}$, de norme 1. Par linéarité, $\frac{|u(x)|_F}{|x|_E} = |u(y)|_F$. Les deux ensembles dont on prend la borne supérieure sont donc égaux, d'où $\|u\| = \sup_{|x|_E=1} |u(x)|_F$.

Par définition, $|u(x)|_F \leq \|u\| |x|_E$ pour tout x . Alors $|v(u(x))|_G \leq \|v\| |u(x)|_F \leq \|v\| \|u\| |x|_E$. Le réel $\|v\| \|u\|$ majore tous les quotients $\frac{|v \circ u(x)|_G}{|x|_E}$, donc $\|v \circ u\| \leq \|v\| \|u\|$.

Barème : a) 2,5 points : 0,25 pour (i) $\Rightarrow$ (ii), 1,5 pour (ii) $\Rightarrow$ (iii) (choix de η , normalisation, cas $x = 0$), 0,75 pour (iii) $\Rightarrow$ (i) ; b) 1,5 point : 0,75 pour chaque résultat.

Exercice 2 : Trois normes sur $C([0,1])$ (4 points)

a. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $(f, g) \rightarrow \int_0^1 fg$:

$$N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| \times 1 \, dt \leq \left(\int_0^1 f(t)^2 \, dt \right)^{1/2} \left(\int_0^1 1 \, dt \right)^{1/2} = N_2(f).$$

Par ailleurs $f(t)^2 \leq N_\infty(f)^2$ pour tout t , donc $N_2(f)^2 \leq N_\infty(f)^2$ par croissance de l'intégrale. Ainsi $N_1 \leq N_2 \leq N_\infty$.

b. Comme $f_n \geq 0$ sur $[0,1]$:

$$N_1(f_n) = \int_0^1 t^n \, dt = \frac{1}{n+1}, \quad N_2(f_n) = \left(\int_0^1 t^{2n} \, dt \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

La fonction f_n est croissante sur $[0,1]$, donc $N_1(f_n) = \frac{1}{n+1}$, $N_2(f_n) = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ et

$$N_{\infty}(f_n) = f_n(1) = 1.$$

- c. On a $\frac{N_{\infty}(f_n)}{N_2(f_n)} = \sqrt{2n+1}$ et $\frac{N_2(f_n)}{N_1(f_n)} = \frac{n+1}{\sqrt{2n+1}} \geq \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}}$, qui tendent vers $+\infty$. Il n'existe donc aucune constante C telle que $N_{\infty} \leq C N_2$, ni telle que $N_2 \leq C N_1$, et a fortiori aucune telle que $N_{\infty} \leq C N_1$ (sinon $N_{\infty} \leq C N_1 \leq C N_2$). Deux normes équivalentes se majorent mutuellement à constante près : **aucun couple parmi N_1 , N_2 , N_{∞} n'est formé de normes équivalentes.**
- d. $N_1(f_n) = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$ et $N_2(f_n) = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \rightarrow 0$: (f_n) tend vers 0 pour N_1 et pour N_2 . Supposons que $f_n \rightarrow h$ pour N_{∞} . Comme $N_1(f_n - h) \leq N_{\infty}(f_n - h)$, on aurait aussi $f_n \rightarrow h$ pour N_1 , donc $h = 0$ par unicité de la limite dans (E, N_1) . Mais $N_{\infty}(f_n - 0) = 1$ ne tend pas vers 0 : contradiction. **La suite (f_n) ne converge pas pour N_{∞} .** (Sa limite simple, nulle sur $[0,1[$ et égale à 1 en 1, n'est d'ailleurs pas continue.)

Barème : a) 1 point (0,5 par inégalité, Cauchy-Schwarz cité) ; b) 1 point ; c) 1 point : 0,5 pour les quotients, 0,5 pour la conclusion ; d) 1 point : 0,25 pour N_1 et N_2 , 0,75 pour l'argument d'unicité.

Erreur fréquente : conclure que les normes sont équivalentes parce qu'on a $N_1 \leq N_2 \leq N_{\infty}$: une seule inégalité ne suffit pas, et le théorème d'équivalence des normes ne s'applique pas ici car E est de dimension infinie.

Exercice 3 : Calculs de normes subordonnées (4 points)

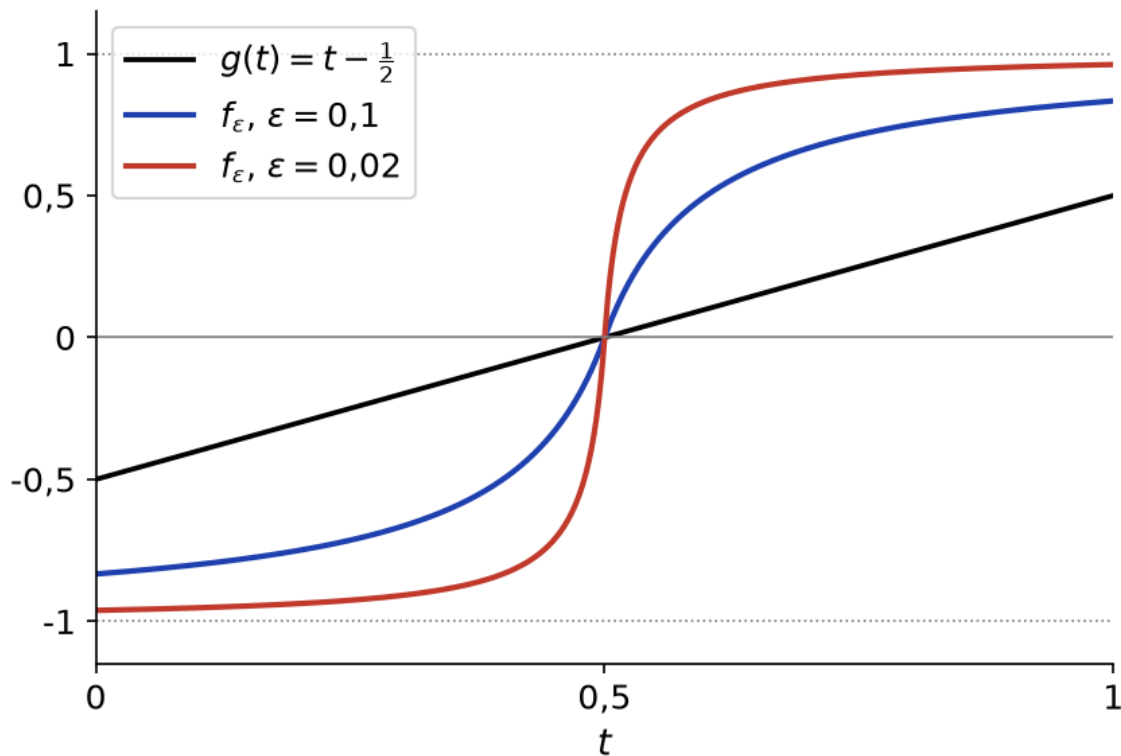
- a. La forme φ_g est linéaire par linéarité de l'intégrale et

$$|\varphi_g(f)| \leq \int_0^1 |f(t)| |g(t)| dt \leq N_{\infty}(f) N_1(g).$$

D'après l'exercice 1, φ_g est continue et $\|\varphi_g\| \leq N_1(g)$. Si $g = 0$, il y a égalité. Sinon, soit $\varepsilon > 0$. La fonction f_{ε} est continue (le dénominateur est minoré par ε), vérifie $|f_{\varepsilon}| \leq 1$, donc $N_{\infty}(f_{\varepsilon}) \leq 1$, et $f_{\varepsilon} \neq 0$. De plus

$$\frac{g^2}{|g| + \varepsilon} = |g| - \frac{\varepsilon |g|}{|g| + \varepsilon} \geq |g| - \varepsilon, \text{ donc } \varphi_g(f_\varepsilon) \geq N_1(g) - \varepsilon.$$

Par suite $\|\varphi_g\| \geq \frac{\varphi_g(f_\varepsilon)}{N_\infty(f_\varepsilon)} \geq \varphi_g(f_\varepsilon) \geq N_1(g) - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. **Donc**
 $\|\varphi_g\| = N_1(g)$.



b. Ici $N_1(g) = \int_0^1 \left|t - \frac{1}{2}\right| dt = 2 \int_0^{1/2} s ds = \frac{1}{4}$: $\|\varphi_g\| = \frac{1}{4}$. Supposons $N_\infty(f) \leq 1$

et $\varphi_g(f) = \frac{1}{4}$. Alors $\int_0^1 (|g| - fg) = 0$, avec $|g| - fg \geq |g|(1 - |f|) \geq 0$ continue :

elle est donc identiquement nulle, donc $fg = |g|$. Ainsi $f(t) = 1$ pour $t > \frac{1}{2}$ et

$f(t) = -1$ pour $t < \frac{1}{2}$, ce qui contredit la continuité de f en $\frac{1}{2}$. **La borne supérieure n'est pas atteinte.**

c. Pour $x \in \ell^1$, $|a_n x_n| \leq \|a\|_\infty |x_n|$, donc la série $\sum |a_n x_n|$ converge par comparaison : $M_a(x) \in \ell^1$ et $|M_a(x)|_1 \leq \|a\|_\infty |x|_1$. L'application M_a est évidemment linéaire ; elle est donc continue avec $\|M_a\| \leq \|a\|_\infty$. Pour la minoration, soit e_k la suite dont seul le terme d'indice k vaut 1, les autres étant nuls : $|e_k|_1 = 1$ et $|M_a(e_k)|_1 = |a_k|$. Donc $\|M_a\| \geq |a_k|$ pour tout k , puis $\|M_a\| \geq \sup_k |a_k|$. **Finalement** $\|M_a\| = \|a\|_\infty$.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour la majoration, 1 point pour la minoration par f_ε ; b) 1 point : 0,25 pour la valeur, 0,75 pour la non-atteinte ; c) 1,5 point : 0,5 pour $M_\alpha(x) \in \ell^1$, 0,5 pour la majoration, 0,5 pour les suites e_k .

Exercice 4 : Formes linéaires sur les polynômes (3 points)

- a. Pour $P = \sum a_k X^k$, $|\varphi(P)| = \left| \sum a_k \right| \leq \sum |a_k| = |P|_1$: φ est continue et $\|\varphi\| \leq 1$. Pour $P = 1$, $\varphi(P) = 1 = |P|_1$. **Donc** $\|\varphi\| = 1$.
- b. Pour $n \geq 1$, $|X^n|_1 = 1$ et $\psi(X^n) = n$. Si ψ était continue, il existerait C tel que $n \leq C$ pour tout n (exercice 1, propriété (iii)) : c'est absurde. **ψ n'est pas continue sur $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_1)$.**
- c. L'espace $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie $n+1$, donc toutes ses normes sont équivalentes : si N est une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$, il existe C tel que $|P|_1 \leq C N(P)$. Or
- $$|\psi(P)| = \left| \sum_{k=1}^n k a_k \right| \leq n |P|_1 \leq n C N(P) : \text{la restriction de } \psi \text{ est continue pour toute norme.}$$
- Pour $\|\cdot\|_1$, la majoration donne une norme au plus n , et $P = X^n$ donne $\psi(X^n) = n = n |X^n|_1$. **La norme subordonnée vaut n** (pour $n \geq 1$; elle est nulle si $n = 0$). Elle tend vers $+\infty$ avec n , ce qui explique la non-continuité sur $\mathbb{R}[X]$ tout entier.

Barème : a) 1 point : 0,5 pour la majoration, 0,5 pour l'égalité ; b) 1 point ; c) 1 point : 0,5 pour l'argument de dimension finie, 0,5 pour le calcul de la norme.

Exercice 5 : Problème, l'opérateur de Volterra (5 points)

- a. Pour f continue, $V(f)$ est la primitive de f nulle en 0 (théorème fondamental de l'analyse) : elle est de classe C^1 , donc $V(f) \in E$, et V est linéaire. Pour $x \in [0,1]$,

$$|V(f)(x)| \leq \int_0^x |f| \leq x N_\infty(f) \leq N_\infty(f), \text{ donc } V \text{ est continue et } \|V\|_\infty \leq 1.$$

Pour $f = 1$, $V(f)(x) = x$ et $N_\infty(V(f)) = 1 = N_\infty(f)$. **Donc** $\|V\|_\infty = 1$.

- b. Pour $n = 1$, c'est l'inégalité $|V(f)(x)| \leq x N_\infty(f)$ vue en a). Si l'inégalité est vraie au rang n , alors

$$|V^{n+1}(f)(x)| = \left| \int_0^x V^n(f)(t) dt \right| \leq \int_0^x \frac{t^n}{n!} N_\infty(f) dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} N_\infty(f),$$

ce qui achève la récurrence. En prenant le sup sur $x \in [0,1]$, $N_\infty(V^n(f)) \leq \frac{1}{n!} N_\infty(f)$.

Pour $f = 1$, on vérifie par récurrence que $V^n(1)(x) = \frac{x^n}{n!}$, de norme $\frac{1}{n!}$. **Donc**

$\|V^n\|_\infty = \frac{1}{n!}$. On remarque que $\|V^n\| < \|V\|^n = 1$ dès que $n \geq 2$.

- c. Pour tout x , $|V(f)(x)| \leq \int_0^x |f| = V(|f|)(x)$. On intègre par parties sur $[0,1]$ avec $U = V(|f|)$, de dérivée $|f|$, et $x \rightarrow x-1$, toutes deux de classe C^1 :

$$\int_0^1 V(|f|)(x) dx = \left[(x-1)V(|f|)(x) \right]_0^1 - \int_0^1 (x-1)|f(x)| dx = \int_0^1 (1-t)|f(t)| dt,$$

le crochet étant nul aux deux bornes. D'où $N_1(V(f)) \leq \int_0^1 (1-t)|f(t)| dt \leq N_1(f)$:

V est continue pour N_1 et $\|V\|_1 \leq 1$.

La fonction h_k est continue, positive, nulle sur $[\frac{1}{k}, 1]$, et $N_1(h_k) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{k} \times 2k = 1$ (aire d'un triangle). Comme $h_k \geq 0$, $V(h_k) \geq 0$ et l'inégalité précédente est une égalité :

$$N_1(V(h_k)) = \int_0^{1/k} (1-t) 2k(1-kt) dt = 1 - 2k \int_0^{1/k} (t - kt^2) dt = 1 - 2k \left(\frac{1}{2k^2} - \frac{1}{3k^2} \right) = 1 - \frac{1}{3k}.$$

Ainsi $\|V\|_1 \geq 1 - \frac{1}{3k}$ pour tout k . **Donc** $\|V\|_1 = 1$, borne qui n'est pas atteinte car

$$\int_0^1 t|f(t)| dt > 0 \text{ dès que } f \neq 0.$$

- d. Pour $n \geq 1$, $f_n(t) = t^n$ vérifie $N_\infty(f_n) = 1$ et $N_\infty(D(f_n)) = N_\infty(n t^{n-1}) = n$. Aucune constante C ne vérifie $n \leq C$ pour tout n : d'après l'exercice 1, **D n'est pas continue.** Intégrer « régularise » (V est continue)

tandis que dériver ne l'est pas pour la norme uniforme.

Barème : a) 1 point : 0,25 pour $V(f) \in E$, 0,5 pour la majoration, 0,25 pour l'égalité ; b) 1,5 point : 1 point pour la récurrence, 0,5 pour la norme ; c) 1,5 point : 0,75 pour l'intégration par parties et la majoration, 0,75 pour le calcul avec h_k ; d) 1 point.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : normes équivalentes et norme subordonnée

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours [« Espaces vectoriels normés » en L3](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [espaces vectoriels normés](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L3 sur ce thème

- [Contrôle de maths L3 : partiel de topologie des espaces normés](#)