

Corrigé du contrôle de maths L3 : modes de convergence, Borel-Cantelli et TCL

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : Borel-Cantelli et convergence L^p	3,5 points
Exercice 2 : Des exemples qui séparent les convergences	4,5 points
Exercice 3 : Longues séries de pile	4 points
Exercice 4 : Loi faible des grands nombres et loi de Poisson	4 points
Exercice 5 : Problème : approximation par le théorème central limite	4 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : Borel-Cantelli et convergence L^p (3,5 points)

- a. **Premier lemme de Borel-Cantelli.** Si $\sum_n \mathbb{P}(A_n) < +\infty$, alors $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$.
Aucune hypothèse d'indépendance n'est requise.

Second lemme de Borel-Cantelli. Si les événements A_n sont **indépendants** et si $\sum_n \mathbb{P}(A_n) = +\infty$, alors $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$.

b. Pour tout $n \geq 1$, on a $\limsup A_k \subset \bigcup_{k \geq n} A_k$. Par sous-additivité dénombrable de $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}(\limsup A_k) \leq \sum_{k \geq n} \mathbb{P}(A_k).$$

Le membre de droite est le reste d'une série convergente. Il tend donc vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$. **Ainsi** $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$. Autrement dit, presque sûrement, seul un nombre fini de A_n se réalisent.

c. Supposons que $\mathbb{E}[|X_n - X|^p] \rightarrow 0$. Soit $\varepsilon > 0$. L'inégalité de Markov appliquée à la variable positive $|X_n - X|^p$ donne :

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(|X_n - X|^p \geq \varepsilon^p) \leq \frac{\mathbb{E}[|X_n - X|^p]}{\varepsilon^p} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc X_n converge vers X en probabilité.

Barème : a) 0,5 point par lemme (indépendance exigée pour le second) ; b) 0,5 point pour l'inclusion, 1 point pour la sous-additivité et le reste de série ; c) 1 point.

Exercice 2 : Des exemples qui séparent les convergences (4,5 points)

a. Soit $\omega \in]0, 1]$. Dès que $n > \frac{1}{\omega}$, on a $\omega > \frac{1}{n}$, donc $X_n(\omega) = 0$. Ainsi $X_n(\omega) \rightarrow 0$ pour tout $\omega \neq 0$. Or $\{0\}$ est de mesure nulle. **Donc** $X_n \rightarrow 0$ **presque sûrement**, et par conséquent en probabilité.

En revanche, $\mathbb{E}[|X_n - 0|] = n \times \frac{1}{n} = 1$ pour tout n . **Donc (X_n) ne converge pas vers 0 dans L^1 .** De plus, elle ne converge dans L^1 vers aucune limite. En effet, une limite dans L^1 serait aussi limite en probabilité, donc égale à 0 presque sûrement.

- b. Pour $p \geq 1$, $|Y_n|^p = Y_n$, car Y_n vaut 0 ou 1. Donc $\mathbb{E}[|Y_n|^p] = \frac{1}{n} \rightarrow 0$. **Ainsi $Y_n \rightarrow 0$ dans L^p , et donc en probabilité.**

Les événements $\{Y_n = 1\}$ sont indépendants, et $\sum_n \mathbb{P}(Y_n = 1) = \sum_n \frac{1}{n} = +\infty$. Par le second lemme de Borel-Cantelli, presque sûrement, $Y_n = 1$ pour une infinité d'indices n . Or une suite à valeurs dans $\{0, 1\}$ qui tend vers 0 est nulle à partir d'un certain rang. Donc Y_n ne tend pas vers 0 presque sûrement.

Enfin, une limite presque sûre éventuelle serait aussi une limite en probabilité, donc égale à 0. **Donc (Y_n) ne converge pas presque sûrement.**

- c. La loi $\mathcal{N}(0, 1)$ est symétrique, donc $-Z$ a la même loi que Z . Ainsi chaque Z_n a la loi de Z . **La suite (Z_n) converge donc en loi vers Z** : ses fonctions caractéristiques sont toutes égales à φ_Z .

Pour n impair, $|Z_n - Z| = 2|Z|$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\mathbb{P}(|Z_n - Z| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(|Z| \geq \frac{\varepsilon}{2})$, qui est une constante strictement positive. Cette suite ne tend donc pas vers 0.

Par ailleurs, supposons que $Z_n \rightarrow W$ en probabilité. La sous-suite $Z_{2n} = Z$ tend alors vers W , donc $W = Z$ presque sûrement. C'est impossible d'après ce qui précède. **Donc (Z_n) ne converge pas en probabilité.**

Erreur fréquente : croire que la convergence en loi vers Z porte sur les variables elles-mêmes. Elle ne porte que sur les lois, et la limite n'est définie qu'à égalité en loi près.

Barème : a) 0,5 point pour la convergence presque sûre, 0,5 point pour la probabilité, 0,5 point pour le

calcul de $\mathbb{E}[X_n]$; b) 0,5 point pour $\mathbb{L}^p$, 1 point pour Borel-Cantelli et la conclusion ; c) 0,5 point pour la convergence en loi, 1 point pour l'absence de convergence en probabilité.

Exercice 3 : Longues séries de pile (4 points)

a. Par indépendance des lancers, $\mathbb{P}(A_n) = 2^{-\ell_n}$. Or $\ell_n \geq 2\log_2 n$, donc :

$$\mathbb{P}(A_n) \leq 2^{-2\log_2 n} = \frac{1}{n^2}.$$

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge aussi. Le premier lemme de Borel-Cantelli donne $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$. **Donc, presque sûrement, seul un nombre fini d'événements A_n se réalisent.** Autrement dit, à partir d'un certain rang, aucune série de piles commençant au lancer n n'atteint la longueur $2\log_2 n$.

b. Pour $k \geq 1$, on note B_k l'événement « les lancers $(k-1)\ell + 1, \dots, k\ell$ donnent tous pile ». Chaque B_k ne dépend que des lancers du k -ième bloc. Ces blocs sont disjoints. Par le lemme des coalitions, les événements B_k sont donc **indépendants**.

De plus, $\mathbb{P}(B_k) = 2^{-\ell}$ ne dépend pas de k , donc $\sum_k \mathbb{P}(B_k) = +\infty$. Le second lemme de Borel-Cantelli donne $\mathbb{P}(\limsup B_k) = 1$. **Donc, presque sûrement, une infinité de blocs sont formés de ℓ piles** : on observe une infinité de séries d'au moins ℓ piles consécutifs.

c. Notons Ω_ℓ l'événement de la question b). On a $\mathbb{P}(\Omega_\ell) = 1$ pour tout $\ell \geq 1$. Une intersection dénombrable d'événements de probabilité 1 est de probabilité 1. **Donc**

$\mathbb{P}\left(\bigcap_{\ell \geq 1} \Omega_\ell\right) = 1$: presque sûrement, pour tout ℓ , il y a une infinité de séries d'au moins ℓ piles.

Ainsi, les longueurs des séries de pile ne sont pas bornées. Cependant, d'après a), une série commençant au lancer n reste plus courte que $2\log_2 n$ à partir d'un certain rang. Les longues séries existent donc, mais leur longueur croît au plus comme un logarithme.

Barème : a) 0,5 point pour $\mathbb{P}(A_n)$, 0,5 point pour la majoration, 0,5 point pour Borel-Cantelli ; b) 0,5 point pour les blocs indépendants, 1 point pour le second lemme ; c) 0,5 point pour l'intersection dénombrable, 0,5 point pour la comparaison.

Exercice 4 : Loi faible des grands nombres et loi de Poisson (4 points)

- a. **Énoncé.** Soit (X_n) une suite de variables de carré intégrable, deux à deux non corrélées, de même espérance m et de même variance σ^2 . C'est le cas d'une suite indépendante et identiquement distribuée avec $\mathbb{E}[X_1^2] < +\infty$. On pose $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$. Alors $\bar{X}_n \rightarrow m$ dans L^2 et en probabilité.

Démonstration. Par linéarité, $\mathbb{E}[\bar{X}_n] = m$. Les covariances croisées sont nulles, donc $\text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$. Ainsi $\mathbb{E}[(\bar{X}_n - m)^2] = \frac{\sigma^2}{n} \rightarrow 0$. Ensuite, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne, pour $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

- b. La variable S_n a la loi d'une somme de n variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $p_n = \frac{\lambda}{n}$. Par indépendance, la fonction caractéristique de la somme est le produit des fonctions caractéristiques, d'où :

$$\varphi_{S_n}(t) = \left(1 - p_n + p_n e^{it}\right)^n = \left(1 + \frac{\lambda(e^{it} - 1)}{n}\right)^n.$$

Pour N de loi $\mathcal{P}(\lambda)$, on a

$$\varphi_N(t) = \sum_{k \geq 0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{itk} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = \exp(\lambda(e^{it} - 1)).$$

- c. On fixe t et on pose $w = \frac{\lambda(e^{it} - 1)}{n}$, $a = 1 + w$ et $b = e^w$. D'abord, $a = (1 - p_n) + p_n e^{it}$ est une moyenne pondérée de 1 et e^{it} , donc $|a| \leq 1$. Ensuite, $|b| = e^{\operatorname{Re} w} = e^{\lambda(\cos t - 1)/n} \leq 1$.

De plus, $|w| \leq \frac{2\lambda}{n}$, et $|e^w - 1 - w| \leq \sum_{k \geq 2} \frac{|w|^k}{k!} \leq |w|^2 e^{|w|}$. L'inégalité admise donne donc :

$$\left| \varphi_{S_n}(t) - e^{\lambda(e^{it} - 1)} \right| = |a^n - b^n| \leq n|w|^2 e^{|w|} \leq \frac{4\lambda^2}{n} e^{2\lambda/n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Théorème de Lévy. Une suite de variables réelles (U_n) converge en loi vers U si et seulement si $\varphi_{U_n}(t) \rightarrow \varphi_U(t)$ pour tout réel t .

Ici φ_{S_n} converge simplement vers φ_N . **Donc S_n converge en loi vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.**

Barème : a) 0,5 point pour les hypothèses, 1 point pour la démonstration ; b) 0,5 point par fonction caractéristique ; c) 0,5 point pour $|a|, |b| \leq 1$, 0,5 point pour la majoration, 0,5 point pour Lévy et la conclusion.

Exercice 5 : Problème : approximation par le théorème central limite (4 points)

- a. **Théorème central limite.** Soit (X_n) une suite de variables réelles **indépendantes et de même loi**, de carré intégrable, d'espérance m et de variance $\sigma^2 > 0$. Alors :

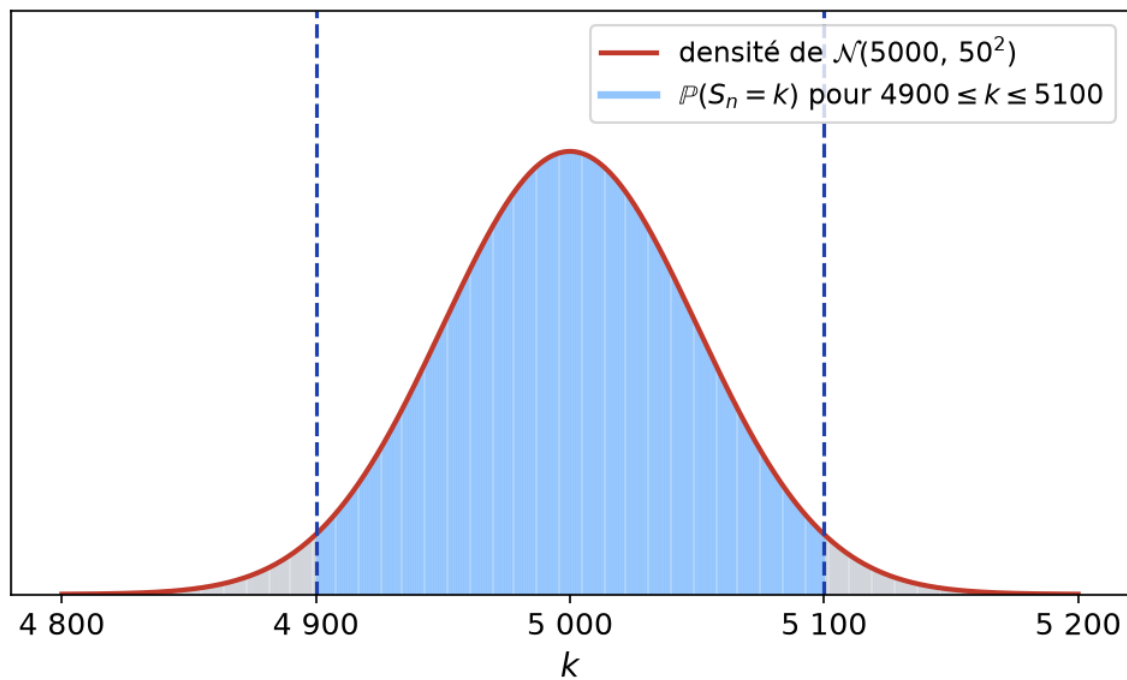
$$\frac{X_1 + \dots + X_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1).$$

- b. Les ε_k sont indépendantes, de même loi de Bernoulli, d'espérance $\frac{1}{2}$ et de variance $\frac{1}{4}$. Pour $n = 10\,000$, on a $nm = 5\,000$ et $\sigma\sqrt{n} = \frac{1}{2} \times 100 = 50$. **On approche donc la loi de $\frac{S_n - 5\,000}{50}$ par la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.**

- c. On pose $U_n = \frac{S_n - 5\,000}{50}$. On a $\mathbb{P}(4\,900 \leq S_n \leq 5\,100) = \mathbb{P}(-2 \leq U_n \leq 2)$. La fonction Φ est continue. La convergence en loi entraîne donc la convergence des fonctions de répartition en tout point, et ainsi $\mathbb{P}(U_n \in [-2, 2]) \rightarrow \Phi(2) - \Phi(-2)$. D'où :

$$\mathbb{P}(4\,900 \leq S_n \leq 5\,100) \approx 2\Phi(2) - 1 \approx 2 \times 0,977 - 1 = 0,954.$$

La probabilité cherchée vaut environ 0,954.



d. On a $\mathbb{E}[S_n] = 5\,000$ et $\text{Var}(S_n) = \frac{n}{4} = 2\,500$. Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathbb{P}(|S_n - 5\,000| > 100) \leq \mathbb{P}(|S_n - 5\,000| \geq 100) \leq \frac{2\,500}{100^2} = 0,25.$$

Donc $\mathbb{P}(4\,900 \leq S_n \leq 5\,100) \geq 0,75$. Cette minoration est certaine, mais grossière.

L'approximation du TCL est bien plus précise (environ $0,954$). Cependant, elle est asymptotique : sans résultat complémentaire, elle ne fournit pas de borne garantie.

e. On cherche n tel que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \leq 0,01\right) \approx 0,95$. Cet événement s'écrit

$$\left|\frac{S_n - n/2}{\sqrt{n}/2}\right| \leq 0,02\sqrt{n}. \text{ Par le TCL, sa probabilité est proche de } 2\Phi(0,02\sqrt{n}) - 1.$$

Or $2\Phi(1,96) - 1 \approx 0,95$. Il suffit donc que $0,02\sqrt{n} \geq 1,96$, soit $\sqrt{n} \geq 98$. **Il faut environ $n \geq 9\,604$ lancers.**

Barème : a) 1 point (indépendance, même loi et variance finie non nulle exigées) ; b) 0,5 point ; c) 0,5 point pour la justification, 0,5 point pour la valeur ; d) 0,5 point pour la minoration, 0,5 point pour la comparaison ; e) 0,5 point.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : modes de convergence, Borel-Cantelli et TCL

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours [« Loi des grands nombres et TCL » en L3](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [loi des grands nombres et tcl](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L3 sur ce thème

- [Contrôle de maths L3 : partiel final : intégration et probabilités](#)