

Corrigé du contrôle de maths L3 : loi d'un vecteur aléatoire et indépendance

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : fonction muette et indépendance	3,5 points
Exercice 2 : Loi du carré et loi du minimum	4 points
Exercice 3 : Fonctions caractéristiques et vecteur gaussien	4 points
Exercice 4 : Espérance conditionnelle sur un triangle	3 points
Exercice 5 : Problème : lois gamma et changement de variables	5,5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : fonction muette et indépendance (3,5 points)

- a. **Méthode de la fonction muette.** Le vecteur X admet la densité f (fonction mesurable positive d'intégrale 1) si et seulement si, pour toute fonction $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable positive (ou mesurable bornée) :

$$\mathbb{E}[h(X)] = \int_{\mathbb{R}^d} h(x) f(x) \, dx.$$

b. **Critère d'indépendance.** Les variables X et Y sont indépendantes si et seulement si $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ pour presque tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Il suffit même que $f_{(X,Y)}(x,y) = g(x)k(y)$ presque partout, avec g et k mesurables positives.

c. Pour t réel, $e^{it(X+Y)} = e^{itX}e^{itY}$. Les variables e^{itX} et e^{itY} sont des fonctions mesurables bornées de X et de Y . Elles sont donc indépendantes. On applique la propriété $\mathbb{E}[UV] = \mathbb{E}[U]\mathbb{E}[V]$ aux parties réelles et imaginaires, qui sont bornées. On obtient :

$$\varphi_{X+Y}(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]\mathbb{E}[e^{itY}] = \varphi_X(t)\varphi_Y(t).$$

Caractérisation. Les variables X et Y sont indépendantes si et seulement si $\varphi_{(X,Y)}(u,v) = \varphi_X(u)\varphi_Y(v)$ pour tous réels u et v . En effet, la fonction caractéristique d'un vecteur détermine sa loi.

Barème : a) 1 point ; b) 1 point ; c) 1 point pour la démonstration, 0,5 point pour la caractérisation.

Exercice 2 : Loi du carré et loi du minimum (4 points)

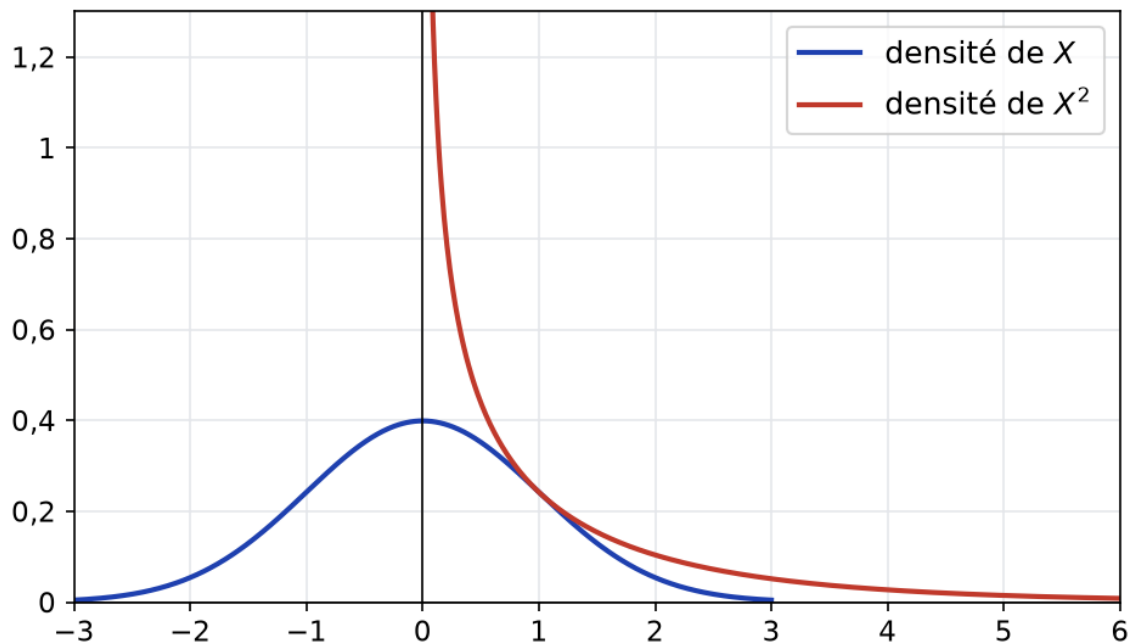
a. Soit h mesurable positive. Par le théorème de transfert, puis par parité de l'intégrande :

$$\mathbb{E}[h(X^2)] = \int_{\mathbb{R}} h(x^2) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \, dx = 2 \int_0^{+\infty} h(x^2) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \, dx.$$

L'application $x \rightarrow x^2$ est un C^1 -difféomorphisme de $]0, +\infty[$ sur lui-même. On pose $y = x^2$, soit $x = \sqrt{y}$ et $dx = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$. Ainsi :

$$\mathbb{E}[h(X^2)] = \int_0^{+\infty} h(y) \frac{e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi y}} dy.$$

Donc X^2 a pour densité $y \rightarrow \frac{e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi y}} 1_{]0, +\infty[}(y)$: c'est la loi du khi-deux à un degré de liberté.



- b. Soit h mesurable positive. Le couple (X, Y) a pour densité $\lambda \mu e^{-\lambda x - \mu y}$ sur $]0, +\infty[^2$, par indépendance. On sépare les cas $x < y$ et $y < x$; la diagonale est de mesure nulle. Par le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\mathbb{E}[h(M)] = \int_0^{+\infty} h(x) \lambda e^{-\lambda x} \left(\int_x^{+\infty} \mu e^{-\mu y} dy \right) dx + \int_0^{+\infty} h(y) \mu e^{-\mu y} \left(\int_y^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \right) dy.$$

Les intégrales intérieures valent $e^{-\mu x}$ et $e^{-\lambda y}$. Donc

$\mathbb{E}[h(M)] = \int_0^{+\infty} h(t)(\lambda + \mu)e^{-(\lambda + \mu)t} dt$. Ainsi M suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda + \mu$.

c. Par le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\mathbb{P}(X < Y) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \left(\int_x^{+\infty} \mu e^{-\mu y} dy \right) dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-(\lambda + \mu)x} dx = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Donc $\mathbb{P}(X < Y) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$.

Erreur fréquente : oublier le facteur 2 dû aux deux antécédents $\pm\sqrt{y}$ de y . On obtient alors une fonction d'intégrale $\frac{1}{2}$, qui n'est pas une densité.

Barème : a) 0,5 point pour la fonction muette et la parité, 1 point pour le changement de variable, 0,5 point pour la densité ; b) 1 point ; c) 1 point.

Exercice 3 : Fonctions caractéristiques et vecteur gaussien (4 points)

a. Soit X de loi exponentielle de paramètre λ . Comme $\operatorname{Re}(\lambda - it) = \lambda > 0$, on a $|e^{-(\lambda - it)x}| = e^{-\lambda x} \rightarrow 0$ en $+\infty$. Donc :

$$\varphi_X(t) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-(\lambda - it)x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

b. Les variables X et $-Y$ sont indépendantes, et $\varphi_{-Y}(t) = \varphi_Y(-t)$. D'après l'exercice 1 :

$$\varphi_{X-Y}(t) = \frac{1}{1 - it} \times \frac{1}{1 + it} = \frac{1}{1 + t^2}.$$

Soit Z de densité $\frac{1}{2}e^{-|z|}$. En coupant l'intégrale en 0 :

$$\varphi_Z(t) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-(1-it)z} dz + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-(1+it)z} dz = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-it} + \frac{1}{1+it} \right) = \frac{1}{1+t^2}.$$

La fonction caractéristique caractérise la loi. **Donc $X - Y$ a pour densité $\frac{1}{2}e^{-|z|}$** : c'est la loi de Laplace.

c. Pour un vecteur gaussien centré de covariance Γ , on a

$$\varphi(u, v) = \exp\left(-\frac{1}{2}(u, v) \Gamma (u, v)^T\right). \text{ Ici } (u, v) \Gamma (u, v)^T = 2u^2 + 2uv + 2v^2, \text{ donc } \varphi_{(X,Y)}(u, v) = e^{-(u^2 + uv + v^2)}.$$

Le couple $(U, V) = (X + Y, X - Y)$ est l'image de (X, Y) par une application linéaire. C'est donc encore un vecteur gaussien centré. De plus :

$$\text{Var}(U) = 2 + 2 + 2 \times 1 = 6, \text{ Var}(V) = 2 + 2 - 2 \times 1 = 2, \text{ Cov}(U, V) = \text{Var}(X) - \text{Var}(Y) = 0.$$

Par conséquent $\varphi_{(U,V)}(s, t) = e^{-(6s^2 + 2t^2)/2} = e^{-3s^2}e^{-t^2} = \varphi_U(s) \varphi_V(t)$. **Donc U et V sont indépendantes, avec $U \sim \mathcal{N}(0, 6)$ et $V \sim \mathcal{N}(0, 2)$.**

En revanche, $\text{Cov}(X, Y) = 1 \neq 0$. **Donc X et Y ne sont pas indépendantes.**

Barème : a) 1 point ; b) 0,5 point pour φ_{X-Y} , 1 point pour l'identification de la loi ; c) 0,5 point pour $\varphi_{(X,Y)}$, 0,5 point pour le caractère gaussien et les covariances, 0,5 point pour les conclusions.

Exercice 4 : Espérance conditionnelle sur un triangle (3 points)

a. Pour $0 < x < 1$, $f_X(x) = \int_0^x 2 \, dy = 2x$. Pour $0 < y < 1$,

$$f_Y(y) = \int_y^1 2 \, dx = 2(1 - y).$$

Les deux densités sont nulles hors de $]0, 1[$.

Sur le triangle $\{0 < x < y < 1\}$, de mesure $\frac{1}{2}$, on a $f_X(x)f_Y(y) = 4x(1 - y) > 0$, alors que f y est nulle. **Donc X et Y ne sont pas indépendantes.**

b. Pour $0 < x < 1$, la densité conditionnelle vaut $f_{Y|X=x}(y) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{1}{x} 1_{]0, x[}(y)$. Sachant $X = x$, la variable Y suit donc la loi uniforme sur $]0, x[$, de moyenne $\frac{x}{2}$. **Ainsi**

$$\mathbb{E}[Y | X] = \frac{X}{2}.$$

Vérification. La variable $X/2$ est $\sigma(X)$ -mesurable. Soit h mesurable bornée. D'une part :

$$\mathbb{E}[Y h(X)] = \int_0^1 \left(\int_0^x 2y \, dy \right) h(x) \, dx = \int_0^1 x^2 h(x) \, dx.$$

D'autre part, $\mathbb{E}\left[\frac{X}{2}h(X)\right] = \int_0^1 \frac{x}{2}h(x) \times 2x \, dx = \int_0^1 x^2 h(x) \, dx$. Les deux espérances coïncident. **C'est la propriété caractéristique de $\mathbb{E}[Y | X]$.**

c. D'abord, $\mathbb{E}[X] = \int_0^1 2x^2 \, dx = \frac{2}{3}$, donc $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y | X]] = \frac{1}{3}$. Ensuite, directement, $\mathbb{E}[Y] = \int_0^1 2y(1-y) \, dy = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. **Donc $\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{3}$.**

Barème : a) 0,5 point pour les marginales, 0,5 point pour la non-indépendance justifiée ; b) 0,5 point pour la densité conditionnelle, 0,5 point pour $\mathbb{E}[Y | X]$, 0,5 point pour la vérification ; c) 0,5 point.

Exercice 5 : Problème : lois gamma et changement de variables (5,5 points)

a. Par indépendance, le couple (X, Y) a pour densité le produit des densités :

$$f(x, y) = \frac{x^{a-1}y^{b-1}e^{-(x+y)}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \mathbf{1}_{]0, +\infty[}^2(x, y).$$

b. Soit $(s, t) \in]0, +\infty[\times]0, 1[$. On résout $x + y = s$ et $\frac{x}{x+y} = t$: on trouve $x = st$ et $y = s(1-t)$, qui sont strictement positifs. Ainsi ϕ est une bijection, de réciproque $\psi(s, t) = (st, s(1-t))$.

Les applications ϕ et ψ sont de classe C^1 , car rationnelles à dénominateurs non nuls. **Donc**

ϕ est un C^1 -difféomorphisme. Le jacobien de ψ vaut :

$$\det \begin{pmatrix} 1 & t & s \\ -t & 1-t & -s \end{pmatrix} = -ts - s(1-t) = -s, \text{ donc } |J\psi(s, t)| = s.$$

c. Soit h mesurable positive sur $\mathbb{R}^2$. Par le théorème de changement de variables $(x, y) = \psi(s, t)$:

$$\mathbb{E}[h(S, T)] = \int_{]0, +\infty[^2} h(\phi(x, y)) f(x, y) dx dy = \int_{]0, +\infty[\times]0, 1[} h(s, t) f(st, s(1-t)) s ds dt.$$

On calcule $f(st, s(1-t)) s = \frac{s^{a+b-1} e^{-s} t^{a-1} (1-t)^{b-1}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$. On l'écrit sous la forme d'un produit :

$$f_{(S,T)}(s, t) = \left[\frac{s^{a+b-1} e^{-s}}{\Gamma(a+b)} \right] \times \left[\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} t^{a-1} (1-t)^{b-1} \right].$$

Cette densité est un produit d'une fonction de s par une fonction de t . **Donc S et T sont indépendantes.** Le premier facteur est la densité de $\Gamma(a+b, 1)$, d'intégrale 1. Donc le second facteur est aussi d'intégrale 1 sur $]0, 1[$, ce qui donne :

$$\int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Ainsi $S \sim \Gamma(a+b, 1)$, et T suit la loi bêta de paramètres a et b .

d. D'abord, $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} x^a e^{-x} dx = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} = a$. De même, $\mathbb{E}[S] = a+b$.

Les variables S et T sont indépendantes et intégrables (T est bornée). Donc $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[ST] = \mathbb{E}[S] \mathbb{E}[T]$, soit $a = (a+b) \mathbb{E}[T]$. Ainsi $\mathbb{E}[T] = \frac{a}{a+b}$.

- e. Pour $a = b = 1$, X et Y suivent la loi exponentielle de paramètre 1. La loi bêta $(1, 1)$ est la loi uniforme sur $]0, 1[$. Donc $\frac{X}{X+Y}$ suit la loi uniforme sur $]0, 1[$ et elle est indépendante de $X + Y$, de densité $s e^{-s}$. Autrement dit, connaissant la durée totale, la part de la première durée est uniformément répartie.

Barème : a) 0,5 point ; b) 0,5 point pour la bijection, 0,5 point pour le caractère C^1 de ϕ et ψ , 0,5 point pour le jacobien ; c) 0,5 point pour le changement de variables, 0,5 point pour la densité du couple, 0,5 point pour l'indépendance et les lois, 0,5 point pour l'égalité bêta-gamma ; d) 0,5 point pour $\mathbb{E}[X]$, 0,5 point pour $\mathbb{E}[T]$; e) 0,5 point.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : loi d'un vecteur aléatoire et indépendance

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Variables aléatoires et espérance](#) » en L3 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [variables aléatoires et espérance](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L3 sur ce thème

- [Contrôle de maths L3 : partiel final : intégration et probabilités](#)