

Corrigé du contrôle de maths L3 : inversion locale et fonctions implicites

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : inversion locale et fonctions implicites	4 points
Exercice 2 : Coordonnées polaires	4 points
Exercice 3 : Un difféomorphisme global du plan	4 points
Exercice 4 : Plan tangent à un hyperboloïde	3 points
Exercice 5 : Problème : le folium de Descartes	5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : inversion locale et fonctions implicites (4 points)

- a. **Théorème d'inversion locale.** Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f:U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in U$. Si $df(a)$ est inversible, alors il existe un ouvert V contenant a et un ouvert W contenant $f(a)$ tels que f réalise une bijection de V sur W , dont la réciproque est de classe $\mathcal{C}^1$.

Autrement dit, f induit un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de V sur W . De plus,

$d(f^{-1})(f(x)) = (df(x))^{-1}$ pour $x \in V$, et si f est $\mathcal{C}^k$, alors f^{-1} l'est aussi.

b. **Théorème des fonctions implicites.** Soit $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $(a,b) \in \Omega$ tel que $F(a,b) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$.

Alors il existe deux intervalles ouverts $I \ni a$ et $J \ni b$, avec $I \times J \subset \Omega$, et une fonction $\varphi : I \rightarrow J$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que :

$$\forall (x,y) \in I \times J, F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x).$$

Si F est de classe $\mathcal{C}^k$, alors φ l'est aussi.

c. Pour tout $x \in I$, on a $F(x, \varphi(x)) = 0$. La règle de dérivation des fonctions composées donne :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \varphi'(x) \frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x)) = 0.$$

Par continuité, $\frac{\partial F}{\partial y}$ ne s'annule pas près de (a,b) , quitte à réduire I . Ainsi

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))}.$$

Barème : a) 1 point pour les hypothèses (classe $\mathcal{C}^1$, différentielle inversible), 0,5 point pour la conclusion avec la régularité de la réciproque ; b) 1 point pour les hypothèses, 0,5 point pour l'équivalence sur $I \times J$; c) 0,5 point pour la dérivation, 0,5 point pour la formule avec la justification de la division.

Exercice 2 : Coordonnées polaires (4 points)

- a. L'application P est de classe $\mathcal{C}^\infty$, car ses composantes le sont. Sa matrice jacobienne est :

$$J_P(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \det J_P(r, \theta) = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r.$$

Sur U , on a $r > 0$, donc la différentielle est inversible en tout point. **Par le théorème d'inversion locale, P est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de U .**

- b. Pour tout $(r, \theta) \in U$, $P(r, \theta + 2\pi) = P(r, \theta)$. Donc P n'est pas injective sur U . **Par conséquent, P n'est pas un difféomorphisme de U sur son image**, puisqu'un difféomorphisme est bijectif. Cet exemple montre qu'un difféomorphisme local en tout point n'est pas forcément global.

- c. **Injectivité.** Supposons $P(r, \theta) = P(r', \theta')$ avec $(r, \theta), (r', \theta') \in V$. En prenant la norme euclidienne, $r = r'$. Comme $r > 0$, on obtient $\cos \theta = \cos \theta'$ et $\sin \theta = \sin \theta'$. Donc $\theta - \theta' \in 2\pi\mathbb{Z}$. Or $|\theta - \theta'| < 2\pi$, donc $\theta = \theta'$.

Image. Tout point non nul du plan s'écrit $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ avec $r > 0$ et un unique $\theta \in]-\pi, \pi]$. Le cas $\theta = \pi$ correspond exactement aux points $(x, 0)$ avec $x < 0$. Ainsi $P(V) = \mathbb{R}^2 \setminus (]-\infty, 0] \times \{0\})$, qui est un ouvert.

Théorème d'inversion globale. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et injective sur un ouvert V , avec $df(x)$ inversible pour tout $x \in V$, alors $f(V)$ est ouvert et f est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de V sur $f(V)$. Ici, les trois hypothèses sont vérifiées. **Donc P réalise un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de V sur le plan privé de la demi-droite $]-\infty, 0] \times \{0\}$.**

Barème : a) 0,5 point pour la jacobienne et le déterminant, 0,5 point pour la conclusion ; b) 1 point ; c) 0,75 point pour l'injectivité, 0,5 point pour l'image, 0,75 point pour l'énoncé et l'application du théorème

d'inversion globale.

Exercice 3 : Un difféomorphisme global du plan (4 points)

a. L'application f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, de matrice jacobienne :

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\cos y & \frac{112\cos x \& 1}{[?]} \end{pmatrix}, \quad \det J_f(x,y) = 1 - \frac{1}{4}\cos x \cos y.$$

Comme $|\cos x \cos y| \leq 1$, on obtient $\det J_f(x,y) \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0$. **Par le théorème d'inversion locale, f est un difféomorphisme local au voisinage de tout point.**

b. La fonction sinus est 1-lipschitzienne, par l'inégalité des accroissements finis. Pour $u = (x,y)$ et $v = (x',y')$, on a donc :

$$|g(u) - g(v)|^2 = \frac{1}{4}(\sin y - \sin y')^2 + \frac{1}{4}(\sin x - \sin x')^2 \leq \frac{1}{4}|u - v|^2.$$

Ainsi g est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne. Ensuite, l'inégalité triangulaire renversée donne :

$$|f(u) - f(v)| \geq |u - v| - |g(u) - g(v)| \geq \frac{1}{2}|u - v|.$$

Si $f(u) = f(v)$, alors $|u - v| = 0$: f est injective.

c. L'équation $f(u) = w$ équivaut à $u + g(u) = w$, c'est-à-dire à $T(u) = u$. Or T est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne, car $|T(u) - T(v)| = |g(u) - g(v)|$. C'est donc une contraction de $\mathbb{R}^2$, espace complet. **D'après le théorème du point fixe de Banach, T admet un point fixe : l'équation $f(u) = w$ a une solution.** Ainsi f est surjective.

- d. D'après b) et c), f est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Elle est de classe $\mathcal{C}^1$, injective, et sa différentielle est inversible partout d'après a). **Par le théorème d'inversion globale, f est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même** (et même $\mathcal{C}^\infty$).

Comme $f(0,0) = (0,0)$, on a $d(f^{-1})(0,0) = (df(0,0))^{-1}$. Or :

$$J_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}, \det = \frac{3}{4}, (J_f(0,0))^{-1} = \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{12}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc la matrice de $d(f^{-1})(0,0)$ est $\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$.

Erreur fréquente : conclure dès a) que f est un difféomorphisme global. Un jacobien partout non nul ne donne que l'inversion locale, comme le montre l'exercice 2.

Barème : a) 0,5 point pour le jacobien et sa minoration, 0,5 point pour la conclusion locale ; b) 0,5 point pour le caractère lipschitzien, 0,5 point pour l'injectivité ; c) 0,5 point pour la reformulation, 0,5 point pour le point fixe ; d) 0,5 point pour la conclusion, 0,5 point pour la matrice.

Exercice 4 : Plan tangent à un hyperboloïde (3 points)

- a. Posons $h(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $S = h^{-1}(\{0\})$. Son gradient vaut $\nabla h(x,y,z) = (2x, 2y, -2z)$. Il ne s'annule qu'en l'origine, qui n'appartient pas à S car $h(0,0,0) = -1$.

Donc $dh(p)$ est surjective de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}$ en tout point p de S : h est une submersion le long de S . **Par conséquent, S est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de**

dimension $3 - 1 = 2$.

- b. On a $1 + 1 - 1 = 1$, donc $a \in S$. L'espace tangent est le noyau de la différentielle :
 $T_a S = \ker dh(a)$, avec $\nabla h(a) = (2, 2, -2)$.

Ainsi $T_a S = \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 : u_1 + u_2 - u_3 = 0\}$. Le plan tangent affine a pour équation $(x - 1) + (y - 1) - (z - 1) = 0$, **soit** $x + y - z = 1$.

- c. Un point de la droite s'écrit $(1 + t, 1, 1 + t)$ avec $t \in \mathbb{R}$. Alors
 $(1+t)^2 + 1 - (1+t)^2 = 1$. **Donc toute la droite est contenue dans** S .

Le vecteur $u = (1, 0, 1)$ vérifie $1 + 0 - 1 = 0$, donc $u \in T_a S$. C'est cohérent : la vitesse en a d'une courbe tracée sur S appartient à l'espace tangent. D'ailleurs, cette droite est aussi incluse dans le plan tangent affine, car $(1+t) + 1 - (1+t) = 1$.

Barème : a) 0,5 point pour le gradient non nul sur S , 0,5 point pour la conclusion ; b) 0,5 point pour $T_a S$, 0,5 point pour le plan affine ; c) 0,5 point pour l'inclusion, 0,5 point pour la cohérence.

Exercice 5 : Problème : le folium de Descartes (5 points)

- a. On a $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3x$, qui s'annule si et seulement si $x = y^2$. En reportant dans l'équation de $\mathcal{C}$:

$$y^6 + y^3 - 3y^3 = y^3(y^3 - 2) = 0.$$

Donc $y = 0$, et alors $x = 0$; ou bien $y = \sqrt[3]{2}$, et alors $x = \sqrt[3]{4}$. **Les points cherchés**

sont $O = (0,0)$ et $B = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$.

b. On calcule $F(A) = \frac{27}{8} + \frac{27}{8} - \frac{27}{4} = 0$, donc $A \in \mathcal{C}$. Ensuite :

$$\frac{\partial F}{\partial y}(A) = \frac{27}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9}{4} \neq 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(A) = \frac{27}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9}{4}.$$

La fonction F est polynomiale, donc $\mathcal{C}^\infty$. Le théorème des fonctions implicites fournit donc φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de $\frac{3}{2}$, avec $\varphi\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$. D'après l'exercice 1 :

$$\varphi'\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9/4}{9/4} = -1.$$

La tangente en A a pour équation $y - \frac{3}{2} = -\left(x - \frac{3}{2}\right)$, soit $y = 3 - x$.

c. Pour x voisin de $\frac{3}{2}$, la relation de l'exercice 1, divisée par 3, s'écrit :

$$x^2 - \varphi(x) + (\varphi(x)^2 - x)\varphi'(x) = 0.$$

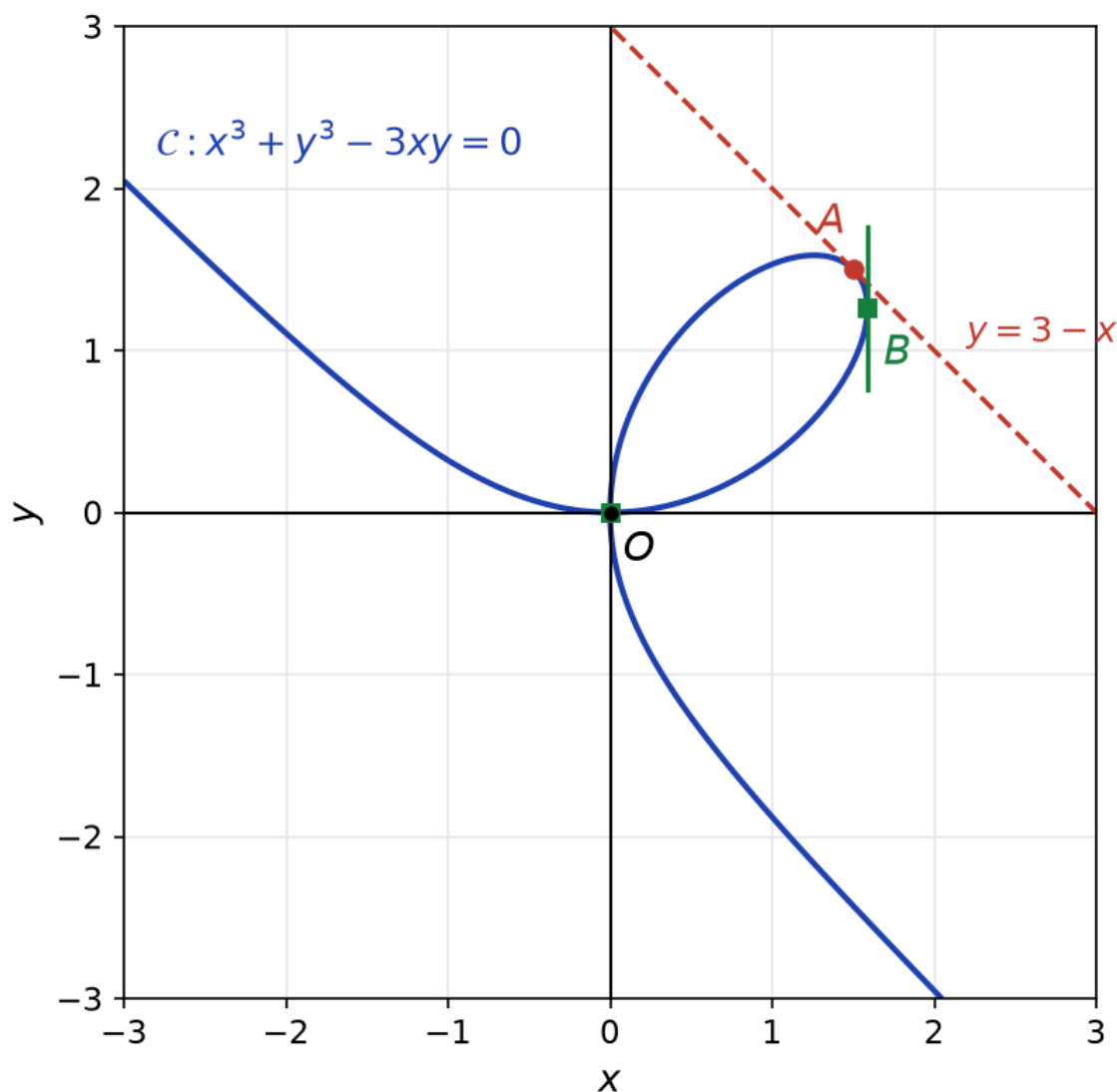
En dérivant une nouvelle fois :

$$2x - \varphi' + (2\varphi\varphi' - 1)\varphi' + (\varphi^2 - x)\varphi'' = 0.$$

En $x = \frac{3}{2}$, avec $\varphi = \frac{3}{2}$ et $\varphi' = -1$, on obtient $3 + 1 + (-3 - 1)(-1) + \frac{3}{4}\varphi'' = 0$, donc $8 + \frac{3}{4}\varphi'' = 0$. **Ainsi $\varphi''\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{32}{3}$.**

La formule de Taylor-Young donne alors $\varphi(x) - (3 - x) = -\frac{16}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + o\left(\left(x - \frac{3}{2}\right)^2\right)$.

Au voisinage de A , la courbe est donc en dessous de sa tangente.



d. Pour $t \neq -1$, posons $D = 1 + t^3$. Alors $x^3 + y^3 = \frac{27t^3 + 27t^6}{D^3} = \frac{27t^3}{D^2}$ et $3xy = \frac{27t^3}{D^2}$. **Donc** $F(M(t)) = 0 : M(t) \in C$.

Quand $t \rightarrow 0$, $M(t) \sim (3t, 3t^2)$ tend vers O , tangentiellement à l'axe des abscisses.
Quand $t \rightarrow +\infty$, $M(t) \sim \left(\frac{3}{t^2}, \frac{3}{t}\right)$ tend aussi vers O , tangentiellement à l'axe des ordonnées.

La fonction $x(t) = \frac{3t}{1+t^3}$ est continue sur $]0, +\infty[$, positive, et tend vers 0 en 0 et en $+\infty$. Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, toute petite valeur $x_0 > 0$ est atteinte par un petit t et par un grand s . Les points $M(t)$ et $M(s)$ sont distincts, car $\frac{y}{x}$ vaut t pour l'un et s pour l'autre. De plus, ils sont tous deux proches de O .

Ainsi, aucun voisinage de O ne rencontre $\mathcal{C}$ selon un graphe $y = \varphi(x)$. La symétrie $F(x,y) = F(y,x)$ exclut de même un graphe $x = \psi(y)$. C'est cohérent avec $\nabla F(0,0) = (0,0)$: aucune des deux versions du théorème ne s'applique, et O est un point double.

Barème : a) 0,5 point pour la condition $x = y^2$, 0,5 point pour les deux points ; b) 0,5 point pour la vérification et l'hypothèse, 0,5 point pour φ' , 0,5 point pour la tangente ; c) 1 point pour φ'' , 0,5 point pour la position ; d) 0,25 point pour $M(t) \in \mathcal{C}$, 0,75 point pour l'argument des deux branches.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : inversion locale et fonctions implicites

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Inversion locale et extrema liés](#) » en L3 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [inversion locale et extrema liés](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L3 sur ce thème

- [Contrôle de maths L3 : extrema libres et multiplicateurs de Lagrange](#)