

Corrigé du contrôle de maths L3 : inégalités de Hölder et espaces L_p

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours, de Young à Hölder	5 points
Exercice 2 : Inégalité de Jensen sur un espace de probabilité	4 points
Exercice 3 : Inclusions entre espaces L_p	5 points
Exercice 4 : Problème, la bosse glissante et l'extraction presque partout	6 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours, de Young à Hölder (5 points)

- a. Si $a = 0$ ou $b = 0$, le membre de gauche est nul et celui de droite positif : l'inégalité est vraie. Supposons donc $a, b > 0$. Le logarithme est concave sur $]0, +\infty[$, et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ avec des coefficients positifs. Donc

$$\ln\left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q\right) \geq \frac{1}{p} \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q) = \ln a + \ln b = \ln(ab).$$

La croissance de l'exponentielle donne alors $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

- b. Traitons d'abord les cas dégénérés. Si $|f|_p = 0$, alors $|f|^p = 0$ presque partout, donc $f = 0$ presque partout, puis $fg = 0$ presque partout : le membre de gauche est nul. Il en va de même si $|g|_q = 0$. Si l'une des normes est infinie et l'autre non nulle, le membre de droite

vaut $+\infty$ et il n'y a rien à montrer.

Supposons maintenant $0 < |f|_p < +\infty$ et $0 < |g|_q < +\infty$. On **normalise** : $F = \frac{|f|}{|f|_p}$ et

$G = \frac{|g|}{|g|_q}$, de sorte que $\int F^p = \int G^q = 1$. L'inégalité de Young, appliquée point par point, donne $FG \leq \frac{F^p}{p} + \frac{G^q}{q}$. En intégrant ces fonctions positives,

$$\int_X F G \, d\mu \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \text{ soit } \int_X |f g| \, d\mu \leq |f|_p |g|_q.$$

C'est l'inégalité de Hölder.

c. Pour $p = q = 2$, on obtient l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** : $\int |fg| \leq |f|_2 |g|_2$. Sur

$[0, 1]$, prenons $g = 1$, dont la norme vaut $\|1\|_2 = \left(\int_0^1 1 \, dx \right)^{1/2} = 1$. Ainsi,

$$|f|_1 = \int_0^1 |f| \times 1 \leq |f|_2. \text{ En particulier, } L^2([0, 1]) \subset L^1([0, 1]).$$

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour le cas nul, 1 point pour la concavité ; b) 2 points : 0,5 pour les cas dégénérés, 0,5 pour la normalisation, 1 point pour l'intégration de Young ; c) 1,5 point : 0,5 pour Cauchy-Schwarz, 1 point pour l'inégalité sur $[0, 1]$.

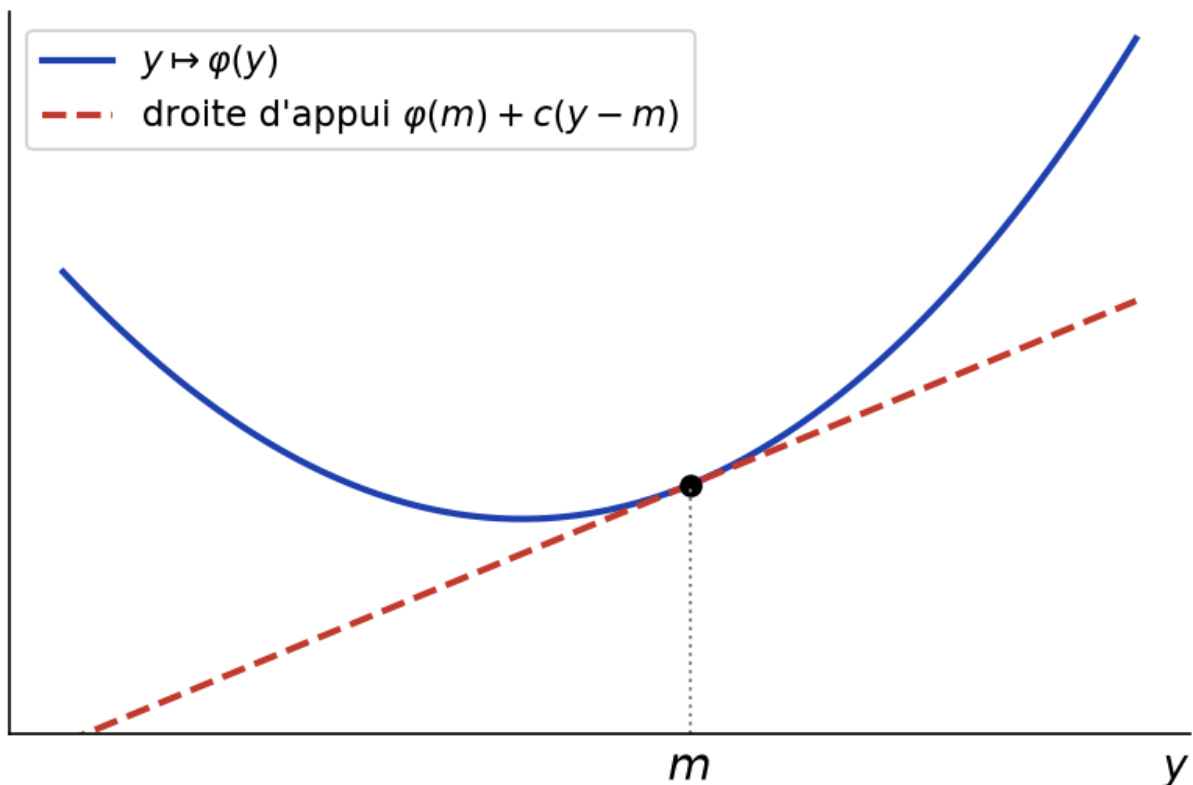
Exercice 2 : Inégalité de Jensen sur un espace de probabilité (4 points)

a. **Inégalité de Jensen.** Si φ est convexe sur $\mathbb{R}$, si Y est intégrable et si $\varphi(Y)$ est intégrable, alors $\varphi(E(Y)) \leq E(\varphi(Y))$.

b. Posons $m = E(Y)$, réel car Y est intégrable, et prenons c donné par la droite d'appui en m . Pour tout $\omega \in \Omega$, $\varphi(Y(\omega)) \geq \varphi(m) + c(Y(\omega) - m)$. Les deux membres sont intégrables. Par croissance et linéarité de l'espérance,

$$E(\varphi(Y)) \geq \varphi(m) E(1) + c(E(Y) - m E(1)) = \varphi(m) + c(m - m) = \varphi(m).$$

On obtient $\varphi(E(Y)) \leq E(\varphi(Y))$. L'hypothèse $P(\Omega) = 1$ sert à écrire $E(1) = 1$: l'espérance d'une constante est cette constante. Sur un espace de mesure quelconque, l'inégalité est fautive en général.



- c. Pour $r \geq 1$, la fonction $\varphi(y) = |y|^r$ est convexe sur $\mathbb{R}$. Appliquée à la variable $|Y|$, intégrable, l'inégalité de Jensen donne $(E|Y|)^r \leq E(|Y|^r)$.

Ensuite, prenons $\Omega = \{1, \dots, n\}$ muni de la probabilité uniforme, et $Y(i) = \ln a_i$. La fonction exponentielle est convexe, donc

$$\exp\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln a_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{\ln a_i}.$$

Le membre de gauche vaut $(a_1 \dots a_n)^{1/n}$. **La moyenne géométrique est donc inférieure à la moyenne arithmétique.**

Barème : a) 1 point ; b) 1,5 point : 1 point pour l'intégration de la droite d'appui, 0,5 pour le rôle de $P(\Omega) = 1$; c) 1,5 point : 0,5 pour la première inégalité, 1 point pour la moyenne géométrique avec le choix de l'espace.

Exercice 3 : Inclusions entre espaces L^p (5 points)

- a. Posons $r = \frac{q}{p} > 1$ et $r' = \frac{q}{q-p}$ son exposant conjugué. L'inégalité de Hölder appliquée à $|f|^p$ et à la constante 1 donne

$$\int_0^1 |f|^p \times 1 \, d\lambda \leq \left(\int_0^1 |f|^{p \cdot r} \, d\lambda \right)^{1/r} \left(\int_0^1 1 \, d\lambda \right)^{1/r'} = \left(\int_0^1 |f|^q \, d\lambda \right)^{p/q}.$$

En élevant à la puissance $\frac{1}{p}$, $|f|_p \leq |f|_q$. Si $f \in L^q$, alors $|f|_p < +\infty$: $L^q([0, 1]) \subset L^p([0, 1])$. Le fait que $\lambda([0, 1]) = 1$ soit fini est essentiel.

Pour $q = +\infty$, on a $|f| \leq |f|_\infty$ presque partout, donc $\int_0^1 |f|^p \leq |f|_\infty^p$. Ainsi $|f|_p \leq |f|_\infty$ et $L^\infty([0, 1]) \subset L^p([0, 1])$.

- b. On a $|f_\alpha|^p = x^{-\alpha p}$, intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $\alpha p < 1$ (critère de Riemann en 0). Donc $f_\alpha \in L^p([0, 1])$ si et seulement si $p < \frac{1}{\alpha}$. Pour $p < q < +\infty$, choisissons $\alpha = \frac{1}{q}$. Alors $\alpha p = \frac{p}{q} < 1$, donc $f_\alpha \in L^p$, mais $\alpha q = 1$, donc $f_\alpha \notin L^q$.
L'inclusion $L^q \subset L^p$ est stricte.

- c. D'abord, $\int_{\mathbb{R}} g^2 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1 < +\infty$, mais $\int_{\mathbb{R}} |g| = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty$. Donc $g \in L^2(\mathbb{R})$ et $g \notin L^1(\mathbb{R})$.

Ensuite, $\int_{\mathbb{R}} |h| = \int_0^1 x^{-1/2} \, dx = 2$, mais $\int_{\mathbb{R}} h^2 = \int_0^1 \frac{dx}{x} = +\infty$. Donc $h \in L^1(\mathbb{R})$ et $h \notin L^2(\mathbb{R})$.

Conclusion : sur $\mathbb{R}$, qui est de mesure infinie, **aucune des inclusions entre L^1 et L^2 n'a lieu**. La fonction g décroît trop lentement à l'infini pour être intégrable, tandis que h explose trop vite en 0 pour être de carré intégrable.

Barème : a) 2 points : 1 point pour Hölder avec les bons exposants, 0,5 pour l'inclusion, 0,5 pour le cas $q = +\infty$; b) 1 point ; c) 2 points : 0,75 pour chaque fonction, 0,5 pour la conclusion.

Erreur fréquente : croire que $L^q \subset L^p$ pour $p < q$ sur tout espace ; ce n'est vrai qu'en mesure finie.

Exercice 4 : Problème, la bosse glissante et l'extraction presque partout (6 points)

a. On a $|f_n|^p = 1_{I_n}$, donc $|f_n|_p^p = \lambda(I_n) = 2^{-k}$ et $|f_n|_p = 2^{-k/p}$. Comme $2^k \leq n < 2^{k+1}$, l'entier k tend vers $+\infty$ avec n . Donc $|f_n|_p \rightarrow 0$: $f_n \rightarrow 0$ dans L^p . En revanche, $\lambda(I_n) > 0$ donne $|f_n|_\infty = 1$ pour tout n : **la suite ne tend pas vers 0 dans L^∞** .

b. Fixons $x \in [0, 1]$ et $k \geq 2$. Les 2^k intervalles I_n , pour $2^k \leq n < 2^{k+1}$, recouvrent $[0, 1]$. Donc au moins l'un d'eux contient x , et $f_n(x) = 1$ pour au moins un n de ce bloc. Par ailleurs, x appartient à au plus deux de ces intervalles, qui ne se chevauchent qu'aux extrémités. Or $2^k \geq 4$, donc au moins deux indices du bloc donnent $f_n(x) = 0$. Ceci vaut pour chaque bloc : **la suite $(f_n(x))$ prend une infinité de fois les valeurs 0 et 1, donc elle diverge**, et ce en tout point.

Si l'on remplace chaque f_n par $\tilde{f}_n$ égale à f_n hors d'un négligeable N_n , l'ensemble $N = \bigcup_n N_n$ est négligeable, comme réunion dénombrable. Hors de N , $\tilde{f}_n(x) = f_n(x)$ diverge. Ainsi la divergence a lieu sur $[0, 1] \setminus N$, de mesure 1 : **aucun représentant de la suite des classes ne converge presque partout**.

c. Prenons $n = 2^k$, c'est-à-dire $j = 0$: $f_{2^k} = 1_{[0, 2^{-k}]}$. Pour $x \in]0, 1]$, on a $f_{2^k}(x) = 0$ dès que $2^{-k} < x$. Ainsi $f_{2^k} \rightarrow 0$ sur $]0, 1]$, donc presque partout, car $\{0\}$ est négligeable.

d. Comme $|g_n - g|_p \rightarrow 0$, on construit (n_k) par récurrence. On choisit n_1 tel que $|g_n - g|_p \leq 2^{-1}$ pour $n \geq n_1$. Puis, n_{k-1} étant choisi, on prend $n_k > n_{k-1}$ tel que $|g_n - g|_p \leq 2^{-k}$ pour $n \geq n_k$. **On a bien** $|g_{n_k} - g|_p \leq 2^{-k}$.

Posons $S_N = \sum_{k=1}^N |g_{n_k} - g|$. L'inégalité de Minkowski donne $|S_N|_p \leq \sum_{k=1}^N 2^{-k} \leq 1$.

La suite (S_N^p) est croissante, positive, et converge vers S^p . Par le théorème de Beppo Levi, $\int S^p = \lim_N \int S_N^p \leq 1$. **Ainsi** $|S|_p \leq 1$.

La fonction positive S^p est d'intégrale finie, donc S est finie presque partout. En un tel point x , la série $\sum_k |g_{n_k}(x) - g(x)|$ converge, et son terme général tend vers 0. **Donc** $g_{n_k} \rightarrow g$ **presque partout**. La conclusion ne dépend pas des représentants choisis, puisqu'une réunion dénombrable de négligeables est négligeable.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour la norme, 0,5 pour la convergence, 0,5 pour L^∞ ; b) 1,5 point : 1 point pour la divergence en tout point, 0,5 pour l'argument sur les classes ; c) 1 point ; d) 2 points : 0,5 pour l'extraction, 1 point pour Minkowski et Beppo Levi, 0,5 pour la conclusion.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : inégalités de Hölder et espaces L_p

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Espaces \$L_p\$](#) » en L3 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [espaces \$L_p\$](#) .

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).