

Corrigé du contrôle de maths L3 : groupes quotients et actions de groupes

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : premier théorème d'isomorphisme	3 points
Exercice 2 : Sous-groupes distingués de S_3 et du groupe diédral D_4	5 points
Exercice 3 : Action par conjugaison et formule des classes	4 points
Exercice 4 : Dénombrement de colliers par les orbites	4 points
Exercice 5 : Problème : les groupes d'ordre 15	4 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : premier théorème d'isomorphisme (3 points)

- a. Un sous-groupe H de G est **distingué** lorsque $g h g^{-1} \in H$ pour tous $g \in G$ et $h \in H$.

D'abord, $\text{Ker } f$ est un sous-groupe : $f(e) = e'$, et si $f(a) = f(b) = e'$, alors $f(a b^{-1}) = f(a) f(b)^{-1} = e'$. Ensuite, pour $g \in G$ et $h \in \text{Ker } f$, on a $f(g h g^{-1}) = f(g) e' f(g)^{-1} = e'$. **Donc $\text{Ker } f$ est distingué dans G .**

- b. **Premier théorème d'isomorphisme.** Le morphisme f induit un isomorphisme

$\bar{f} : G / \text{Ker } f \rightarrow \text{Im } f$, défini par $\bar{f}(g \text{ Ker } f) = f(g)$.

Démonstration. Posons $N = \text{Ker } f$. Le quotient G/N est un groupe car N est distingué.

Bonne définition : si $g N = g' N$, alors $g^{-1} g' \in N$, donc $f(g)^{-1} f(g') = e'$, c'est-à-dire $f(g) = f(g')$. La valeur ne dépend donc pas du représentant choisi.

Morphisme : $\bar{f}(g N \cdot h N) = \bar{f}(g h N) = f(g h) = f(g) f(h)$. Surjectivité sur $\text{Im } f$: évidente par construction. Injectivité : si $\bar{f}(g N) = e'$, alors $g \in N$, donc $g N = N$ est le neutre du quotient.

Ainsi $G / \text{Ker } f \simeq \text{Im } f$.

Barème : a) 0,5 point pour la définition, 0,5 point pour la preuve ; b) 0,5 point pour l'énoncé, 0,5 point pour la bonne définition, 1 point pour morphisme, injectivité et surjectivité.

Exercice 2 : Sous-groupes distingués de S_3 et du groupe diédral D_4 (5 points)

a. Par le théorème de Lagrange, l'ordre d'un sous-groupe de S_3 divise 6. On obtient donc :

- l'ordre 1 : $\{\text{id}\}$;

- l'ordre 2 : les trois sous-groupes $\langle (1\ 2) \rangle$, $\langle (1\ 3) \rangle$, $\langle (2\ 3) \rangle$;

- l'ordre 3 : un tel sous-groupe est cyclique, engendré par un 3-cycle. Or les deux 3-cycles sont inverses l'un de l'autre, donc le seul sous-groupe d'ordre 3 est

$$\mathcal{A}_3 = \{[\text{id}], (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\} ;$$

- l'ordre 6 : S_3 lui-même.

Le conjugué d'une transposition est donné par $\sigma (a\ b) \sigma^{-1} = (\sigma(a)\ \sigma(b))$. Par exemple, $(1\ 3)(1\ 2)(1\ 3)^{-1} = (3\ 2)$, qui n'appartient pas à $\langle (1\ 2) \rangle$. Les sous-groupes d'ordre 2 ne sont donc pas distingués. En revanche, A_3 est d'indice 2, donc distingué. **Les sous-groupes distingués de S_3 sont $\{id\}$, A_3 et S_3 .**

b. La signature $\varepsilon : S_3 \rightarrow \{-1, 1\}$ est un morphisme de groupes. Il est surjectif, car $\varepsilon((1\ 2)) = -1$. Son noyau est A_3 par définition. Par le premier théorème d'isomorphisme, $S_3 / A_3 \simeq \{-1, 1\}$. Or $\{-1, 1\}$ est cyclique d'ordre 2. **Donc $S_3 / A_3 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.**

c. Une rotation r^k commute toujours avec r . Elle commute avec s si et seulement si $s r^k s = r^k$, soit $r^{-k} = r^k$, soit $r^{2k} = e$. Cela donne $k \in \{0, 2\}$.

Une symétrie $s r^k$ ne commute pas avec r . En effet, $r (s r^k) = s r^{-1} r^k = s r^{k-1}$, alors que $(s r^k) r = s r^{k+1}$. L'égalité imposerait $r^2 = e$, ce qui est faux.

Donc $Z(D_4) = \{e, r^2\}$.

d. D'abord, H est stable : $r^2 s = s r^{-2} = s r^2$, puis $s \cdot s r^2 = r^2$ et $(s r^2)^2 = e$. Il contient e et chaque élément est son propre inverse, donc H est un sous-groupe. Il est d'indice $8/4 = 2$: ses classes à gauche et à droite coïncident (H et son complémentaire). **Donc H est distingué.**

En revanche, $r s r^{-1} = s r^{-1} r^{-1} = s r^{-2} = s r^2$, qui n'appartient pas à K . **Donc K n'est pas distingué.** On remarque ainsi que « distingué dans distingué » n'implique pas « distingué » : K est distingué dans H , qui est abélien.

Enfin, $D_4 / Z(D_4)$ est d'ordre $8/2 = 4$. Pour tout g , on a $g^2 \in Z(D_4)$: $(r^k)^2 = r^{2k}$ et $(s r^k)^2 = s r^k s r^k = r^{-k} r^k = e$. Tout élément du quotient vérifie donc $\bar{g}^2 = \bar{e}$. Un groupe d'ordre 4 dont tous les éléments sont d'ordre au plus 2 est abélien et n'est pas cyclique. **Par conséquent $D_4 / Z(D_4) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.**

Barème : a) 0,5 point pour la liste, 1 point pour l'étude de la distinction ; b) 1 point (morphisme surjectif, noyau, théorème cité) ; c) 1 point ; d) 0,5 point pour H , 0,5 point pour K , 0,5 point pour le quotient.

Erreur fréquente : oublier de vérifier que la symétrie $s \tau^2$ ne commute pas avec τ , et placer à tort des symétries dans le centre.

Exercice 3 : Action par conjugaison et formule des classes (4 points)

- a. On a $e \cdot x = x$. De plus, $g \cdot (h \cdot x) = g h x h^{-1} g^{-1} = (g h) \cdot x$. Il s'agit donc d'une action.

L'orbite de x est sa **classe de conjugaison** $\{g x g^{-1} : g \in G\}$. Le stabilisateur de x est le **centralisateur** $C(x) = \{g \in G : g x = x g\}$. L'orbite de x est réduite à $\{x\}$ si et seulement si $x \in Z(G)$.

Les orbites forment une partition de G . Par la relation orbite-stabilisateur, l'orbite de x a $[G : C(x)]$ éléments. Notons $x_1, \dots, x_k$ des représentants des classes non réduites à un élément. On obtient :

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^k [G : C(x_i)].$$

C'est la formule des classes.

- b. Chaque indice $[G : C(x_i)]$ divise $|G| = p^n$ par le théorème de Lagrange. Il est de plus strictement supérieur à 1, car $x_i \notin Z(G)$. Il est donc divisible par p .

Dans la formule des classes, $|G|$ et la somme sont divisibles par p . Par conséquent p divise $|Z(G)|$. Comme $e \in Z(G)$, on a $|Z(G)| \geq 1$, donc $|Z(G)| \geq p$. **Le centre d'un p -groupe non trivial n'est pas réduit à $\{e\}$.**

- c. Supposons $G/Z(G) = \langle g Z(G) \rangle$. Tout $x \in G$ s'écrit alors $x = g^a z$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $z \in Z(G)$. Pour $y = g^b z'$, on obtient $xy = g^{a+b} z z' = yx$, car z et z' sont centraux. Donc G est abélien.

Soit maintenant $|G| = p^2$. D'après b), $|Z(G)| \in \{p, p^2\}$. Si $|Z(G)| = p$, alors $G/Z(G)$ est d'ordre p premier, donc cyclique. Alors G serait abélien, soit $Z(G) = G$, ce qui contredit $|Z(G)| = p$. **Donc $Z(G) = G$: tout groupe d'ordre p^2 est abélien.**

Barème : a) 0,5 point pour l'action, 0,5 point pour orbites et stabilisateurs, 0,5 point pour la formule ; b) 1 point pour la divisibilité des indices, 0,5 point pour la conclusion ; c) 0,5 point pour le lemme, 0,5 point pour l'ordre p^2 .

Exercice 4 : Dénombrement de colliers par les orbites (4 points)

- a. Soit $E = \{(g, x) \in G \times X : g \cdot x = x\}$. En comptant par g , on obtient $|E| = \sum_g |\text{Fix}(g)|$. En comptant par x , on obtient $|E| = \sum_x |\text{Stab}(x)|$.

Or la relation orbite-stabilisateur donne $|\text{Stab}(x)| = \frac{|G|}{|\omega(x)|}$, où $\omega(x)$ désigne l'orbite de x .

Pour une orbite ω , la somme des $\frac{1}{|\omega|}$ sur ses éléments vaut 1. Ainsi

$$\sum_x |\text{Stab}(x)| = |G| \times k, \text{ où } k \text{ est le nombre d'orbites.}$$

Le nombre d'orbites vaut donc $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|$.

- b. L'ensemble X des coloriage des sommets compte $3^4 = 81$ éléments. Un coloriage est fixé par g si et seulement s'il est constant sur chaque cycle de la permutation des sommets induite par g . Donc $|\text{Fix}(g)| = 3^{c(g)}$, où $c(g)$ est le nombre de cycles.

Élément	Permutation des sommets	Nombre de cycles	Points fixes
e	identité	4	81
r, r^3	$(1\ 2\ 3\ 4), (1\ 4\ 3\ 2)$	1	3 chacun
r^2	$(1\ 3)(2\ 4)$	2	9
$s, s r^2$ (diagonales)	$(2\ 4), (1\ 3)$	3	27 chacun

$s r, s r^3$ (médianes)	$(1\ 4)(2\ 3), (1\ 2)(3\ 4)$	2	9 chacun
-------------------------	------------------------------	---	----------

La somme vaut $81 + 3 + 3 + 9 + 27 + 27 + 9 + 9 = 168$. D'après la formule de Burnside, le nombre d'orbites est $\frac{168}{8} = 21$. **On peut former 21 colliers différents.**

Barème : a) 0,5 point pour le double comptage, 1 point pour l'utilisation de la relation orbite-stabilisateur ; b) 1,5 point pour le tableau (dont 0,5 point pour distinguer diagonales et médianes), 1 point pour le résultat.

Erreur fréquente : attribuer 9 points fixes à toutes les symétries, alors qu'une symétrie d'axe diagonal fixe deux sommets.

Exercice 5 : Problème : les groupes d'ordre 15 (4 points)

a. Soit G un groupe fini d'ordre $p^a m$, avec p premier et p ne divisant pas m .

1. Il existe des sous-groupes d'ordre p^a , appelés p -Sylow.

2. Tout p -sous-groupe de G est contenu dans un p -Sylow, et les p -Sylow sont conjugués entre eux.

3. Leur nombre n_p vérifie $n_p \mid m$ et $n_p \equiv 1 \pmod{p}$.

b. On a $15 = 3 \times 5$. Le nombre n_3 divise 5 et vérifie $n_3 \equiv 1 \pmod{3}$. Comme $5 \equiv 2 \pmod{3}$, on obtient $n_3 = 1$. De même, n_5 divise 3 et $n_5 \equiv 1 \pmod{5}$, donc $n_5 = 1$.

Un conjugué d'un Sylow est encore un Sylow. L'unique 3-Sylow P vérifie donc $g P g^{-1} = P$ pour tout g . **Ainsi P et Q sont distingués.**

c. L'ordre de $P \cap Q$ divise 3 et 5 par le théorème de Lagrange, donc vaut 1. Ainsi $P \cap Q = \{e\}$.

Soit $x \in P$ et $y \in Q$. D'une part, $(x y x^{-1}) y^{-1} \in Q$, car Q est distingué. D'autre part, $x (y x^{-1} y^{-1}) \in P$, car P est distingué. Le commutateur appartient donc à $P \cap Q = \{e\}$. **Par conséquent** $x y = y x$.

d. L'application $\varphi: P \times Q \rightarrow G$, $(x, y) \rightarrow x y$, est un morphisme. En effet, $x y x' y' = x x' y y'$ d'après c).

Son noyau est trivial : si $x y = e$, alors $x = y^{-1} \in P \cap Q$, d'où $x = y = e$. Les deux groupes ont 15 éléments, donc φ est un isomorphisme.

Un groupe d'ordre premier est cyclique : $P \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $Q \simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Comme 3 et 5 sont premiers entre eux, le théorème chinois donne $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$. **Donc**
 $G \simeq \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$: **tout groupe d'ordre 15 est cyclique.**

Barème : a) 1 point (0,5 pour l'existence et la conjugaison, 0,5 pour les conditions sur n_p) ; b) 0,5 point pour les calculs de n_3 et n_5 , 0,5 point pour la distinction ; c) 0,5 point pour l'intersection, 0,5 point pour le commutateur ; d) 0,5 point pour l'isomorphisme, 0,5 point pour le théorème chinois.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : groupes quotients et actions de groupes

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Groupes et actions](#) » en L3 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [groupes et actions](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L3 sur ce thème

- [Contrôle de maths L3 : partiel d'algèbre : groupes, anneaux et corps](#)