

Corrigé du contrôle de maths L3 : Fubini-Tonelli et changement de variables

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours, les théorèmes de Fubini	3 points
Exercice 2 : L'intégrale de Gauss par passage en polaires	4 points
Exercice 3 : Deux intégrales itérées différentes	4 points
Exercice 4 : Volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$	4 points
Exercice 5 : Problème, convolution d'indicatrices	5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours, les théorèmes de Fubini (3 points)

a. **Fubini-Tonelli.** Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés sigma-finis, et

$F : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$ mesurable pour la tribu produit. Alors $x \rightarrow \int_Y F(x, y) \, d\nu(y)$ et

$y \rightarrow \int_X F(x, y) \, d\mu(x)$ sont mesurables, et

$$\int_{X \times Y} F \, d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y F(x, y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X F(x, y) \, d\mu(x) \right) d\nu(y),$$

ces trois quantités étant dans $[0, +\infty]$.

b. **Fubini.** Si F est intégrable sur $X \times Y$ pour $\mu \otimes \nu$, alors pour μ -presque tout x , $y \rightarrow F(x, y)$ est ν -intégrable. De plus, $x \rightarrow \int_Y F(x, y) d\nu(y)$, définie presque partout, est μ -intégrable, et il en va de même en échangeant les rôles. Les deux intégrales itérées sont égales à $\int_{X \times Y} F d(\mu \otimes \nu)$. En pratique, on vérifie l'intégrabilité en appliquant Tonelli à $|F|$.

c. **Changement de variables.** Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi: U \rightarrow V$ un C^1 -difféomorphisme. Pour toute $f: V \rightarrow [0, +\infty]$ mesurable, ou pour toute f intégrable sur V ,

$$\int_V f d\lambda_n = \int_U f(\varphi(u)) |\det J\varphi(u)| d\lambda_n(u).$$

Pour les coordonnées polaires, $\det J = \cos\theta \times r\cos\theta - (-r\sin\theta) \times \sin\theta = r$. **Le jacobien vaut r .**

Barème : a) 1 point (0,5 si l'hypothèse de positivité manque) ; b) 1 point ; c) 1 point : 0,5 pour l'énoncé, 0,5 pour le jacobien.

Exercice 2 : L'intégrale de Gauss par passage en polaires (4 points)

a. La fonction $x \rightarrow e^{-x^2}$ est continue et positive. Pour $|x| \geq 1$, on a $x^2 \geq |x|$, donc $e^{-x^2} \leq e^{-|x|}$, fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Sur $[-1, 1]$, la fonction est bornée par 1. **Elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}$.**

b. La fonction $(x, y) \rightarrow e^{-x^2} e^{-y^2}$ est continue, donc borélienne, et positive sur $\mathbb{R}^2$. Le théorème de Fubini-Tonelli s'applique sans autre vérification :

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2 + y^2)} d\lambda_2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy \right) dx = I \times I.$$

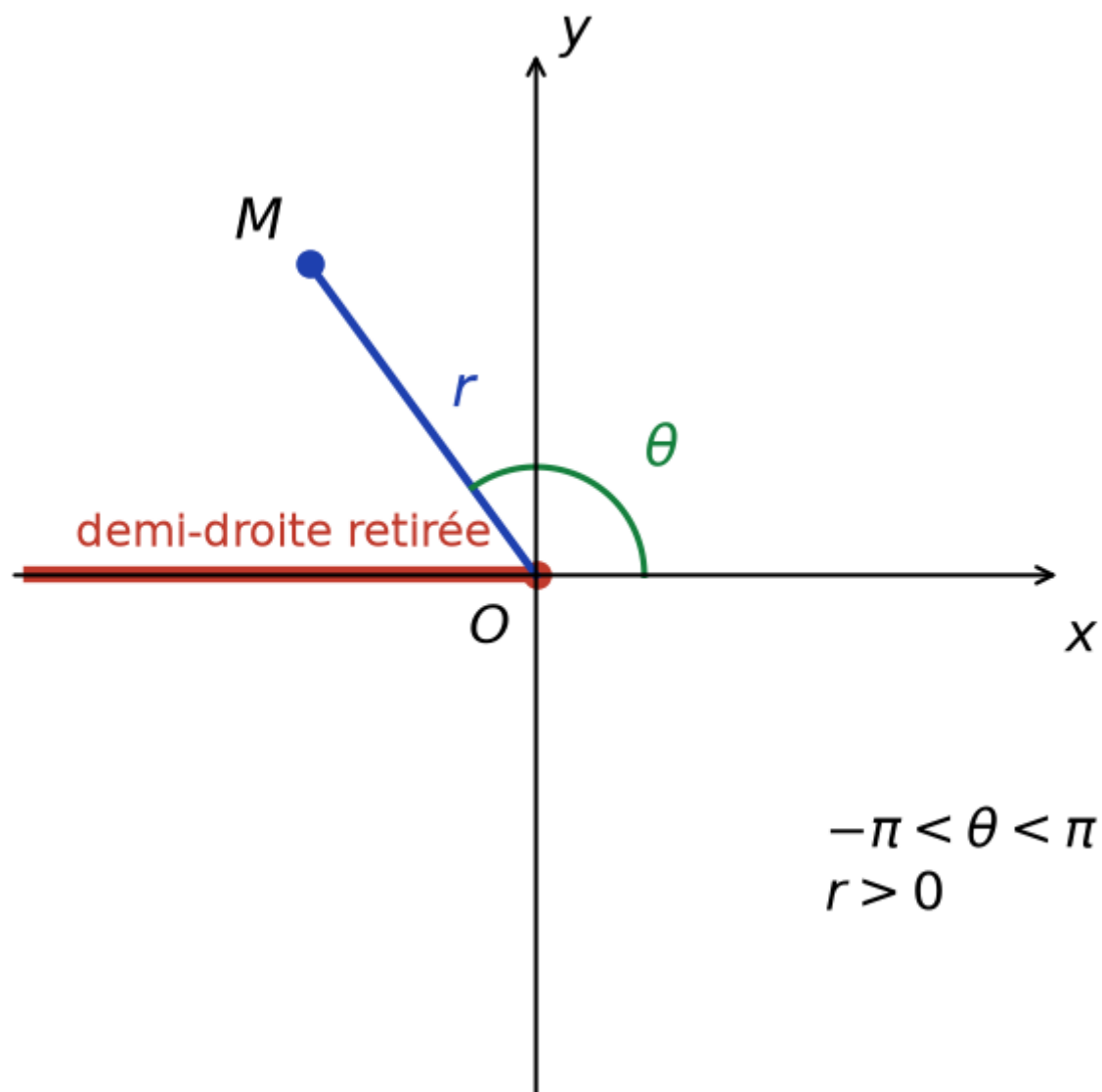
Donc
$$I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2 + y^2)} d\lambda_2.$$

- c. On pose $U =]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$, $V = \mathbb{R}^2 \setminus (]-\infty, 0] \times \{0\})$, et $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. L'application φ est un C^1 -difféomorphisme de U sur V , de jacobien r . La demi-droite fermée $]-\infty, 0] \times \{0\}$ est contenue dans une droite, donc négligeable pour λ_2 : on peut intégrer sur V au lieu de $\mathbb{R}^2$.

Le changement de variables pour une fonction positive, puis Tonelli sur le produit U , donnent

$$I^2 = \int_U e^{-r^2} r dr d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \times \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr = 2\pi \times \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^{+\infty} = 2\pi \times \frac{1}{2} = \pi.$$

Comme $I > 0$, $I = \sqrt{\pi}$.



Barème : a) 1 point ; b) 1 point, dont 0,5 pour Tonelli justifié par la positivité ; c) 2 points : 0,5 pour les ouverts et le difféomorphisme, 0,5 pour la partie négligeable, 0,5 pour le calcul, 0,5 pour la valeur de I .

Exercice 3 : Deux intégrales itérées différentes (4 points)

a. Pour $x > 0$ fixé, on dérive un quotient :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{(x^2 + y^2) - y \times 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = f(x, y).$$

Ainsi, pour tout $x \in]0, 1]$, la fonction $y \rightarrow f(x, y)$ est continue sur $[0, 1]$, et

$$\int_0^1 f(x, y) dy = \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \right]_0^1 = \frac{1}{1 + x^2}. \text{ Par conséquent,}$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

La première intégrale itérée vaut $\frac{\pi}{4}$.

b. On remarque que $f(y, x) = -f(x, y)$. Donc

$$\int_0^1 f(x, y) dx = - \int_0^1 f(y, x) dx = - \frac{1}{1 + y^2}, \text{ d'après le calcul de a) avec les rôles}$$

échangés. En intégrant en y , **la seconde intégrale itérée vaut $-\frac{\pi}{4}$.**

c. En polaires, avec $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $r \in]0, 1[$, on a $x^2 - y^2 = r^2 \cos 2\theta$ et

$$(x^2 + y^2)^2 = r^4. \text{ Donc } |f| = \frac{|\cos 2\theta|}{r^2}. \text{ Le changement de variables (fonction positive) et}$$

Tonelli donnent

$$\int_D |f| d\lambda_2 = \int_0^{\pi/2} |\cos 2\theta| d\theta \times \int_0^1 \frac{r}{r^2} dr = 1 \times \int_0^1 \frac{dr}{r} = +\infty.$$

Cette intégrale est infinie. Comme $D \subset \mathbb{Q}$, on a aussi $\int_{\mathbb{Q}} |f| = +\infty$: f n'est pas

intégrable sur $\mathbb{Q}$. L'hypothèse du théorème de Fubini n'est donc pas satisfaite. De plus, Tonelli ne s'applique pas à f , qui change de signe. Aucune contradiction : ce contre-exemple montre qu'il faut **toujours vérifier l'intégrabilité par Tonelli sur $|f|$** avant d'intervertir.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour la dérivée, 0,5 pour l'intégrale intérieure, 0,5 pour la valeur ; b) 1 point ; c) 1,5 point : 0,5 pour l'expression polaire, 0,5 pour l'intégrale infinie, 0,5 pour l'explication.

Erreur fréquente : conclure que Fubini est faux ; il est seulement appliqué hors de ses hypothèses.

Exercice 4 : Volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$ (4 points)

- a. L'application linéaire $h_r : x \rightarrow r x$ envoie $B_n(1)$ sur $B_n(r)$, et son déterminant vaut r^n . Or l'image d'un borélien A par une application linéaire M inversible vérifie $\lambda_n(M(A)) = |\det M| \lambda_n(A)$. Donc $\lambda_n(B_n(r)) = r^n V_n$.
- b. Pour $(u, y, z) \in \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}^2$, on a $(u, y, z) \in B_n(1)$ si et seulement si $y^2 + z^2 \leq 1$ et $|u|^2 \leq 1 - y^2 - z^2$. La mesure λ_n est la mesure produit $\lambda_{n-2} \otimes \lambda_2$, et l'indicatrice de la boule est positive et borélienne. Le théorème de Tonelli donne donc, avec Δ le disque unité fermé de $\mathbb{R}^2$,

$$V_n = \int_{\Delta} \lambda_{n-2}(B_{n-2}(\sqrt{1-y^2-z^2})) dy dz = V_{n-2} \int_{\Delta} (1-y^2-z^2)^{\frac{n-2}{2}} dy dz,$$

d'après a) (le cercle unité, où le rayon est nul, est négligeable). En passant en polaires (jacobien r),

$$\int_{\Delta} (1-y^2-z^2)^{\frac{n-2}{2}} dy dz = 2\pi \int_0^1 (1-r^2)^{\frac{n-2}{2}} r dr = 2\pi \left[-\frac{(1-r^2)^{n/2}}{n} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{n}.$$

Donc $V_n = \frac{2\pi}{n} V_{n-2}$ pour $n \geq 3$.

- c. On a $V_1 = \lambda([-1, 1]) = 2$ et $V_2 = \pi$, aire du disque unité (par exemple en polaires :

$$2\pi \int_0^1 r dr = \pi). \text{ La récurrence donne :}$$

$$V_3 = \frac{2\pi}{3} \times 2 = \frac{4\pi}{3}; \quad V_4 = \frac{2\pi}{4} \times \pi = \frac{\pi^2}{2};$$

$$V_5 = \frac{2\pi}{5} \times \frac{4\pi}{3} = \frac{8\pi^2}{15}; \quad V_6 = \frac{2\pi}{6} \times \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^3}{6}.$$

On obtient $V_3 = \frac{4\pi}{3}$, $V_4 = \frac{\pi^2}{2}$, $V_5 = \frac{8\pi^2}{15}$ et $V_6 = \frac{\pi^3}{6}$. Enfin, pour $n \geq 13$, on a $\frac{2\pi}{n} \leq \frac{1}{2}$, car $4\pi < 13$. Donc $V_n \leq \frac{1}{2} V_{n-2}$, et chacune des deux sous-suites de rang pair et de rang impair est majorée par une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. **Ainsi** $V_n \rightarrow 0$.

Barème : a) 1 point ; b) 2 points : 1 point pour Tonelli avec la tranche correctement décrite, 1 point pour le calcul polaire ; c) 1 point : 0,5 pour les valeurs, 0,5 pour la limite.

Exercice 5 : Problème, convolution d'indicatrices (5 points)

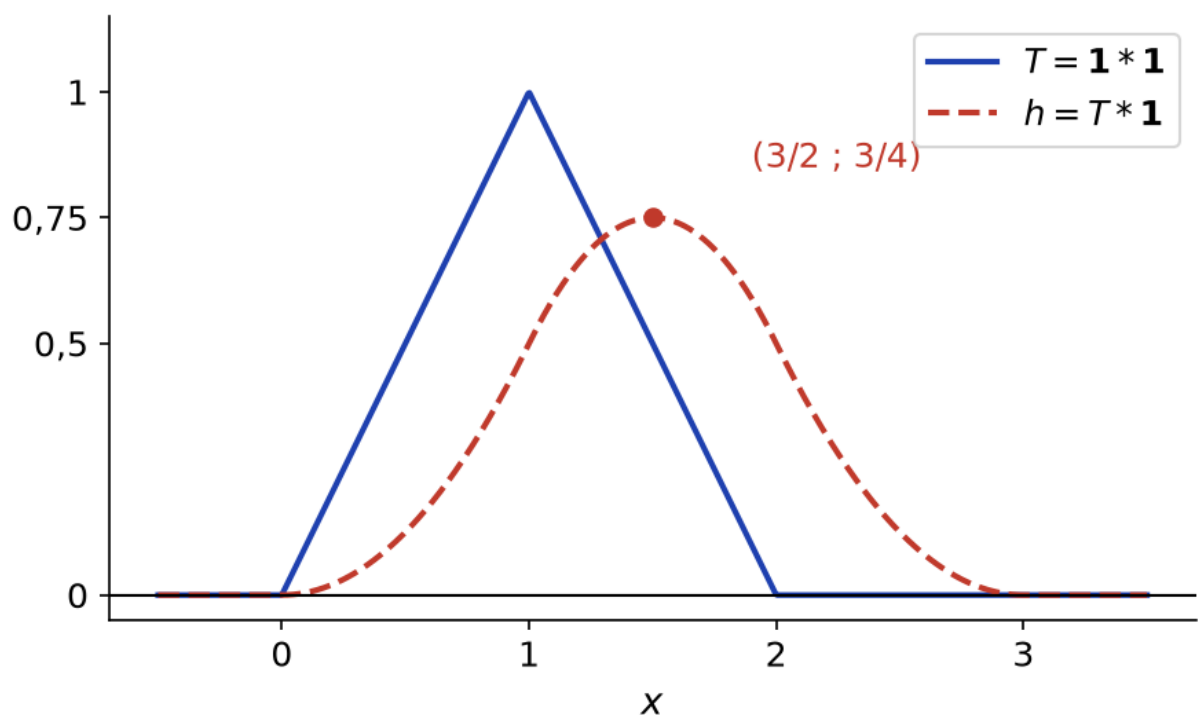
a. Pour x réel, $1(x-y)1(y) = 1$ si et seulement si $0 \leq y \leq 1$ et $x-1 \leq y \leq x$. Donc $(1 * 1)(x) = \lambda([0, 1] \cap [x-1, x])$. En distinguant les cas :

- si $x \leq 0$ ou $x \geq 2$, l'intersection est de mesure nulle : $T(x) = 0$;

- si $0 \leq x \leq 1$, l'intersection est $[0, x]$: $T(x) = x$;

- si $1 \leq x \leq 2$, l'intersection est $[x-1, 1]$: $T(x) = 2-x$.

T est la fonction « triangle » de support $[0, 2]$ et de sommet $(1, 1)$.



b. La fonction $(x, y) \rightarrow 1(x-y)1(y)$ est borélienne et positive. Par Tonelli, puis par invariance de λ par translation,

$$\int_{\mathbb{R}} T(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} 1(y) \left(\int_{\mathbb{R}} 1(x-y) \, dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} 1(y) \times 1 \, dy = 1.$$

On a bien $\int T = 1 = \left(\int 1\right)^2$. Sur le graphe, c'est l'aire du triangle de base 2 et de hauteur 1 : $\frac{2 \times 1}{2} = 1$.

- c. La fonction $H(x, y) = |f(x - y)| |g(y)|$ est mesurable et positive. Tonelli et l'invariance par translation donnent

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} H(x, y) \, dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x - y)| \, dx \right) dy = \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty.$$

La fonction positive $x \rightarrow \int H(x, y) \, dy$ est donc d'intégrale finie, par conséquent finie presque partout. Pour ces x , la fonction $y \rightarrow f(x - y) g(y)$ est intégrable : $(f * g)(x)$ est défini pour presque tout x . Enfin, $|(f * g)(x)| \leq \int H(x, y) \, dy$. En intégrant en x , $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

- d. Par définition, $h(x) = \int_{\mathbb{R}} T(x - y) 1(y) \, dy = \int_0^1 T(x - y) \, dy$. Le changement de variable $u = x - y$ donne $h(x) = \int_{x-1}^x T(u) \, du$.

Pour $x \in [0, 1]$, T est nulle sur $[x - 1, 0]$, donc $h(x) = \int_0^x u \, du = \frac{x^2}{2}$.

Pour $x \in [1, 2]$, on a

$$h(x) = \int_{x-1}^1 u \, du + \int_1^x (2 - u) \, du = \frac{1 - (x - 1)^2}{2} + 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}.$$

Après simplification,

$$h(x) = -x^2 + 3x - \frac{3}{2}.$$

Ainsi $h(x) = \frac{x^2}{2}$ sur $[0, 1]$ et $h(x) = -x^2 + 3x - \frac{3}{2}$ sur $[1, 2]$. Les deux expressions valent $\frac{1}{2}$ en $x = 1$, et $h\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}$ est le maximum.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour l'expression par la mesure, 0,5 pour les trois cas, 0,5 pour le graphe ; b) 1 point ; c) 1,5 point : 1 point pour Tonelli sur $|f(x - y) g(y)|$, 0,5 pour l'inégalité ; d) 1 point : 0,5 par intervalle.

Après le corrigé du contrôle : Fubini-Tonelli et changement de variables

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Fubini et changement de variables](#) » en [L3](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [fubini et changement de variables](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).