

Corrigé du contrôle de maths L3 : fonctions holomorphes et formule de Cauchy

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : formule de Cauchy et théorème de Liouville	4 points
Exercice 2 : Équations de Cauchy-Riemann	4 points
Exercice 3 : Détermination principale du logarithme	3,5 points
Exercice 4 : Intégrales sur des cercles	3,5 points
Exercice 5 : Problème : Liouville, zéros isolés et maximum	5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : formule de Cauchy et théorème de Liouville (4 points)

- a. **Formule intégrale de Cauchy.** Si f est holomorphe sur l'ouvert U et si le disque fermé $\overline{D}(a,r)$ est inclus dans U , alors :

$$\forall z \in D(a,r), \quad f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

- b. On paramètre le cercle par $w = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Sa longueur vaut $2\pi r$. Sur ce cercle, $|w - a| = r$ et $|f(w)| \leq M(r)$, donc :

$$\left| \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \right| \leq \frac{M(r)}{r^{n+1}}.$$

L'inégalité de la longueur (module d'une intégrale curviligne) donne alors :

$$\left| f^{(n)}(a) \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \times 2\pi r \times \frac{M(r)}{r^{n+1}} = \frac{n! M(r)}{r^n}.$$

Ce sont les inégalités de Cauchy.

- c. **Théorème de Liouville.** Toute fonction entière (holomorphe sur $\mathbb{C}$) et bornée est constante.

Démonstration. Soit f entière, avec $|f| \leq M$ sur $\mathbb{C}$. Soit $a \in \mathbb{C}$. Pour tout $r > 0$, le disque fermé $\overline{D}(a, r)$ est inclus dans $\mathbb{C}$. L'inégalité de Cauchy pour $n = 1$ donne $|f'(a)| \leq \frac{M}{r}$.

En faisant tendre r vers $+\infty$, on obtient $f'(a) = 0$. Ainsi f' est nulle sur $\mathbb{C}$, qui est connexe. **Donc f est constante.**

Barème : a) 1 point (hypothèse du disque fermé inclus dans U exigée) ; b) 0,5 point pour la majoration de l'intégrande, 1 point pour l'inégalité de la longueur et le résultat ; c) 0,5 point pour l'énoncé, 1 point pour la démonstration.

Exercice 2 : Équations de Cauchy-Riemann (4 points)

- a. La fonction $f = u + iv$ est holomorphe sur un ouvert U si et seulement si u et v sont différentiables sur U , vues comme fonctions de (x, y) , et vérifient les **équations de Cauchy-Riemann** :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

On a alors $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$.

- b. On calcule $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x$. **Donc $\Delta u = 0$: u est harmonique.**

Si $w = \operatorname{Re} f$ avec f holomorphe, alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, car une fonction holomorphe est analytique. Les équations de Cauchy-Riemann et le théorème de Schwarz donnent $w_{xx} = v_{yy}$ et $w_{yy} = -v_{xx}$, donc $\Delta w = 0$. Or $\Delta(x^2 + y^2) = 4 \neq 0$. **Donc $x^2 + y^2$ n'est la partie réelle d'aucune fonction holomorphe.**

- c. La première équation impose $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + 2$. En intégrant en y , on obtient $v(x, y) = 3x^2y - y^3 + 2y + \varphi(x)$, où φ est dérivable.

La seconde équation impose $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy$. Or $\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + \varphi'(x)$, donc $\varphi' = 0$: φ est une constante réelle c .

Réciproquement, ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifient les deux équations. **Les solutions sont $v(x, y) = 3x^2y - y^3 + 2y + c$, avec $c \in \mathbb{R}$.**

- d. On développe $(x + iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$ et $2z = 2x + 2iy$. Par

conséquent :

$$u + iv = (x^3 - 3xy^2 + 2x) + i(3x^2y - y^3 + 2y) + ic.$$

Ainsi $f(z) = z^3 + 2z + ic$, avec $c \in \mathbb{R}$.

Barème : a) 0,5 point pour les équations, 0,5 point pour la caractérisation et f' ; b) 0,5 point pour $\Delta u = 0$, 0,5 point pour $x^2 + y^2$; c) 0,5 point pour l'intégration, 0,5 point pour la constante ; d) 1 point.

Exercice 3 : Détermination principale du logarithme (3,5 points)

- a. Pour $z \in U$, on a $\exp(\text{Log } z) = e^{\ln|z|} e^{i\text{Arg } z} = |z| e^{i\text{Arg } z} = z$, par définition d'un argument. **Donc** $\exp \circ \text{Log} = \text{id}_U$.

Ensuite, $|1+i| = \sqrt{2}$ et $\text{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4}$. **Donc** $\text{Log}(1+i) = \frac{\ln 2}{2} + i\frac{\pi}{4}$. De même, $|-i| = 1$ et $\text{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}$. **Donc** $\text{Log}(-i) = -i\frac{\pi}{2}$.

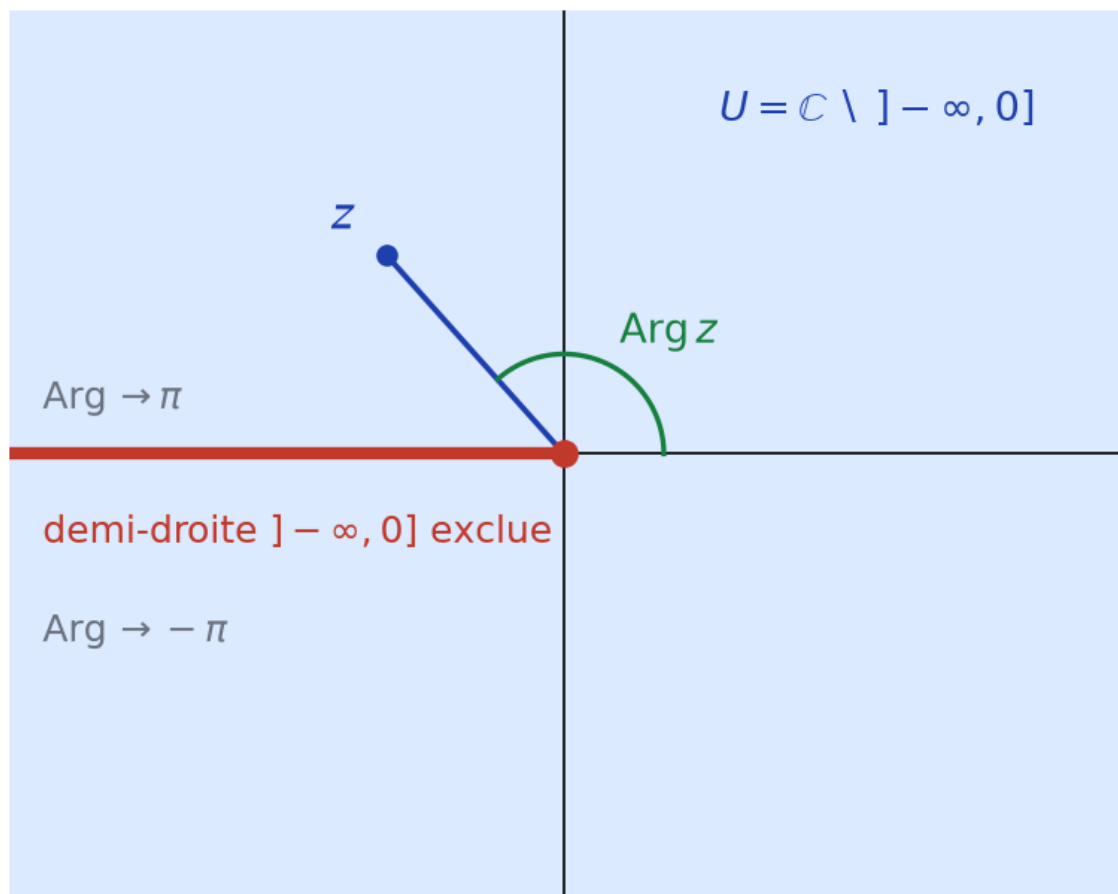
- b. D'abord, Log est continue sur U , car $z \rightarrow \ln|z|$ et Arg le sont. Elle est aussi injective, puisque $\exp \circ \text{Log} = \text{id}$.

Soit $z_0 \in U$, $w_0 = \text{Log } z_0$, et $z \in U$ distinct de z_0 , avec $w = \text{Log } z$. Alors $w \neq w_0$ et :

$$\frac{\operatorname{Log} z - \operatorname{Log} z_0}{z - z_0} = \frac{w - w_0}{e^w - e^{w_0}}.$$

Quand $z \rightarrow z_0$, la continuité donne $w \rightarrow w_0$. Or $\frac{e^w - e^{w_0}}{w - w_0} \rightarrow e^{w_0} = z_0 \neq 0$. **Donc**

Log est dérivable au sens complexe en z_0 , avec $\operatorname{Log}'(z_0) = \frac{1}{z_0}$: elle est holomorphe sur U .



c. Supposons qu'une telle fonction L existe. En dérivant $\exp(L(z)) = z$, on obtient

$L'(z) e^{L(z)} = 1$, soit $L'(z) = \frac{1}{z}$. Ainsi $\frac{1}{z}$ admet une primitive holomorphe sur $\mathbb{C}^*$. Son intégrale sur le chemin fermé $C(0,1)$ est donc nulle.

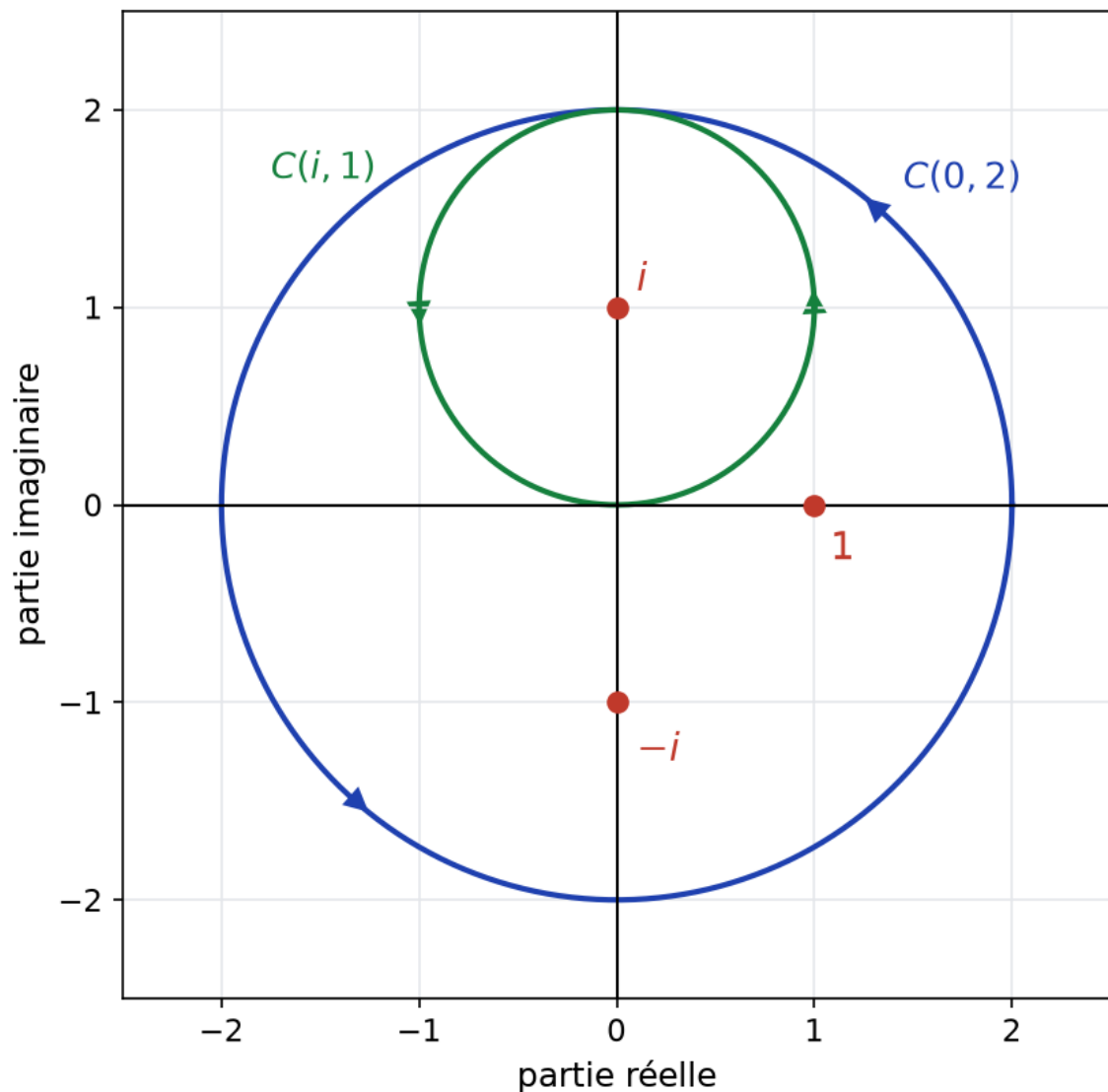
Or, avec $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, on a $\int_{C(0,1)} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = 2i\pi \neq 0$. **C'est une contradiction : il n'existe pas de logarithme holomorphe sur $\mathbb{C}^*$.** C'est pourquoi on retire

une demi-droite.

Barème : a) 0,5 point pour $\exp \circ \text{Log}$, 0,25 point par valeur ; b) 0,5 point pour la continuité et l'injectivité, 1 point pour le taux d'accroissement et la limite ; c) 0,5 point pour $L' = 1/z$, 0,5 point pour le calcul de l'intégrale et la contradiction.

Exercice 4 : Intégrales sur des cercles (3,5 points)

- a. Le dessin ci-dessous montre que 1 , i et $-i$ sont à l'intérieur de $C(0,2)$, car leur module vaut 1. En revanche, seul i est à l'intérieur de $C(i,1)$, car $|-i - i| = 2 > 1$.



La fonction $f(z) = e^z$ est entière, et $\overline{D}(0,2) \subset \mathbb{C}$. Comme $|1| < 2$, la formule de Cauchy donne $I_1 = 2i\pi f(1)$. **Donc** $I_1 = 2i\pi e$.

b. Avec la même fonction f , la formule de Cauchy pour les dérivées donne

$$\int_{C(0,2)} \frac{f(z)}{(z-1)^3} dz = \frac{2i\pi}{2!} f''(1). \text{ Or } f''(1) = e. \text{ **Donc** } I_2 = i\pi e.$$

c. On décompose en éléments simples : $\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right)$. Pour $|a| < 2$, la formule

de Cauchy appliquée à la fonction constante 1 donne $\int_{C(0,2)} \frac{dz}{z-a} = 2i\pi$. Comme

$$|i| = |-i| = 1 < 2 :$$

$$I_3 = \frac{1}{2i}(2i\pi - 2i\pi) = 0.$$

Donc $I_3 = 0$. Pour I_4 , posons $g(z) = \frac{1}{z+i}$. Elle est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$, qui contient le disque fermé $\overline{D}(i,1)$. Alors $I_4 = \int_{C(i,1)} \frac{g(z)}{z-i} dz = 2i\pi g(i) = \frac{2i\pi}{2i}$. **Donc** $I_4 = \pi$.

Erreur fréquente : appliquer la formule de Cauchy à $\frac{1}{z^2+1}$ sur $C(0,2)$ sans remarquer que ses deux pôles sont à l'intérieur du cercle.

Barème : a) 0,5 point pour le dessin avec les positions des points, 0,5 point pour I_1 ; b) 0,5 point pour la formule des dérivées, 0,5 point pour le résultat ; c) 0,75 point pour I_3 , 0,75 point pour I_4 avec la justification du disque.

Exercice 5 : Problème : Liouville, zéros isolés et maximum (5 points)

a. Écrivons $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ avec $a_n \neq 0$. Si P ne s'annule pas, $\frac{1}{P}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, donc entière.

Pour $z \neq 0$, on a $|P(z)| \geq |z|^n \left(|a_n| - \sum_{k < n} |a_k| |z|^{k-n} \right)$, qui tend vers $+\infty$. Il existe donc $R > 0$ tel que $|P(z)| \geq 1$ pour $|z| \geq R$. Sur ce domaine, $\left| \frac{1}{P} \right| \leq 1$. Sur le compact $\overline{D}(0,R)$, la fonction continue $\frac{1}{P}$ est bornée.

Ainsi $\frac{1}{P}$ est entière et bornée. D'après le théorème de Liouville, elle est constante, donc P

aussi. C'est absurde, car $n \geq 1$. **Donc tout polynôme complexe non constant admet au moins une racine : c'est le théorème de d'Alembert-Gauss.**

- b. **Principe des zéros isolés.** Si f est holomorphe sur un ouvert connexe U et n'est pas identiquement nulle, alors ses zéros sont isolés. **Prolongement analytique.** Si deux fonctions holomorphes sur U connexe coïncident sur une partie ayant un point d'accumulation dans U , elles sont égales sur U .

Soit f entière telle que $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$. Les fonctions f et $z \rightarrow z^2$ coïncident sur $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, qui s'accumule en $0 \in \mathbb{C}$. Or $\mathbb{C}$ est connexe. **Donc $f(z) = z^2$: c'est l'unique solution**, et elle convient.

Supposons maintenant que g existe. Pour $n = 2k$ pair, $g\left(\frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2k}$. Donc g coïncide avec l'identité sur un ensemble qui s'accumule en $0 \in D(0,2)$, disque connexe. Ainsi $g(z) = z$ sur $D(0,2)$. Mais alors $g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$, alors que l'hypothèse impose $-\frac{1}{3}$. **Une telle fonction g n'existe donc pas.**

- c. **Principe du maximum.** Soit f holomorphe sur un ouvert connexe U . Si $|f|$ admet un maximum local en un point de U , alors f est constante sur U . En particulier, si f est holomorphe au voisinage d'un disque fermé, le maximum de $|f|$ sur ce disque est atteint sur le cercle bord.

Maximum. La fonction $f(z) = z^2 + 3$ est entière et non constante. Le maximum de $|f|$ sur le compact $\overline{D}(0,1)$ existe, et il est donc atteint sur le cercle $|z| = 1$. Sur ce cercle, $|z^2 + 3| \leq |z|^2 + 3 = 4$. L'égalité a lieu si et seulement si z^2 est un réel positif de module 1, c'est-à-dire $z^2 = 1$. **Le maximum vaut 4, atteint en $z = 1$ et $z = -1$.**

Minimum. Les zéros de f vérifient $z^2 = -3$, donc $|z| = \sqrt{3} > 1$. Ainsi $\frac{1}{f}$ est holomorphe sur le disque connexe $D(0, \sqrt{3})$, qui contient $\overline{D}(0,1)$. Par le principe du maximum appliqué à $\frac{1}{f}$, le minimum de $|f|$ est atteint sur le cercle. Or $|z^2 + 3| \geq 3 - |z|^2 = 2$, avec égalité si et seulement si $z^2 = -1$. **Le minimum vaut 2, atteint en $z = i$ et $z = -i$.**

Barème : a) 0,5 point pour le caractère entier, 0,5 point pour le caractère borné, 0,5 point pour la conclusion ; b) 0,5 point pour les énoncés, 0,75 point pour $f(z) = z^2$, 0,75 point pour la non-existence de g ; c) 0,5 point pour l'énoncé, 0,5 point pour le maximum, 0,5 point pour le minimum.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : fonctions holomorphes et formule de Cauchy

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Fonctions holomorphes](#) » en L3 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [fonctions holomorphes](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).