

Corrigé du contrôle de maths L3 : extrema libres et multiplicateurs de Lagrange

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : conditions d'extremum	4 points
Exercice 2 : Points critiques et matrice hessienne	5 points
Exercice 3 : Extrema de xyz sur une sphère	6 points
Exercice 4 : Problème : minimisation d'une fonctionnelle quadratique	5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : conditions d'extremum (4 points)

- a. Supposons par exemple que f admette un minimum local en a . Il existe donc $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$ et $f(x) \geq f(a)$ pour tout $x \in B(a, r)$.

Fixons $h \in \mathbb{R}^n$ non nul et posons $\psi(t) = f(a + th)$ pour $|t| < r/|h|$. La fonction ψ est dérivable en 0, avec $\psi'(0) = df(a)(h)$, et elle admet un minimum en 0.

Pour $t > 0$, le taux $\frac{\psi(t) - \psi(0)}{t}$ est positif ; pour $t < 0$, il est négatif. En passant à la limite,

$\psi'(0) \geq 0$ et $\psi'(0) \leq 0$. Donc $df(a)(h) = 0$ pour tout h . **Ainsi** $df(a) = 0$: a est un point critique. Le cas d'un maximum se traite de même avec $-f$.

- b. **Théorème des extrema liés.** Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f, g_1, \dots, g_p$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U . On pose $M = \{x \in U : g_1(x) = \dots = g_p(x) = 0\}$.

Soit $a \in M$ tel que la restriction $f|_M$ admette un extremum local en a . Supposons la **condition de qualification** : les formes linéaires $dg_1(a), \dots, dg_p(a)$ sont linéairement indépendantes. Alors il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, appelés multiplicateurs de Lagrange, tels que :

$$df(a) = \lambda_1 dg_1(a) + \dots + \lambda_p dg_p(a).$$

- c. Si $(x, y) \in \Gamma$, alors $x^3 = y^2 \geq 0$, donc $x \geq 0 = f(O)$. **Le minimum de f sur Γ vaut donc 0, atteint en O .**

Cependant, $\nabla g(x, y) = (-3x^2, 2y)$, donc $\nabla g(O) = (0, 0)$, alors que $\nabla f(O) = (1, 0)$. **Aucun réel λ ne vérifie $\nabla f(O) = \lambda \nabla g(O)$.** Il n'y a pas de contradiction : la condition de qualification n'est pas satisfaite en O , qui est un point de rebroussement de Γ .

Barème : a) 0,5 point pour la fonction d'une variable, 1 point pour les deux inégalités et la conclusion ; b) 0,5 point pour la condition de qualification, 1 point pour la conclusion ; c) 0,5 point pour le minimum, 0,5 point pour l'absence de multiplicateur et l'explication.

Exercice 2 : Points critiques et matrice hessienne (5 points)

- a. La fonction f est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$. Ses points critiques vérifient :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4x = 0.$$

La première équation donne $y = x^3$. En reportant, on obtient $x = y^3 = x^9$, soit $x(x^8 - 1) = 0$. Donc $x \in \{-1, 0, 1\}$. **Les points critiques sont** $(0,0)$, $(1,1)$ et $(-1,-1)$.

b. La matrice hessienne vaut $H(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$.

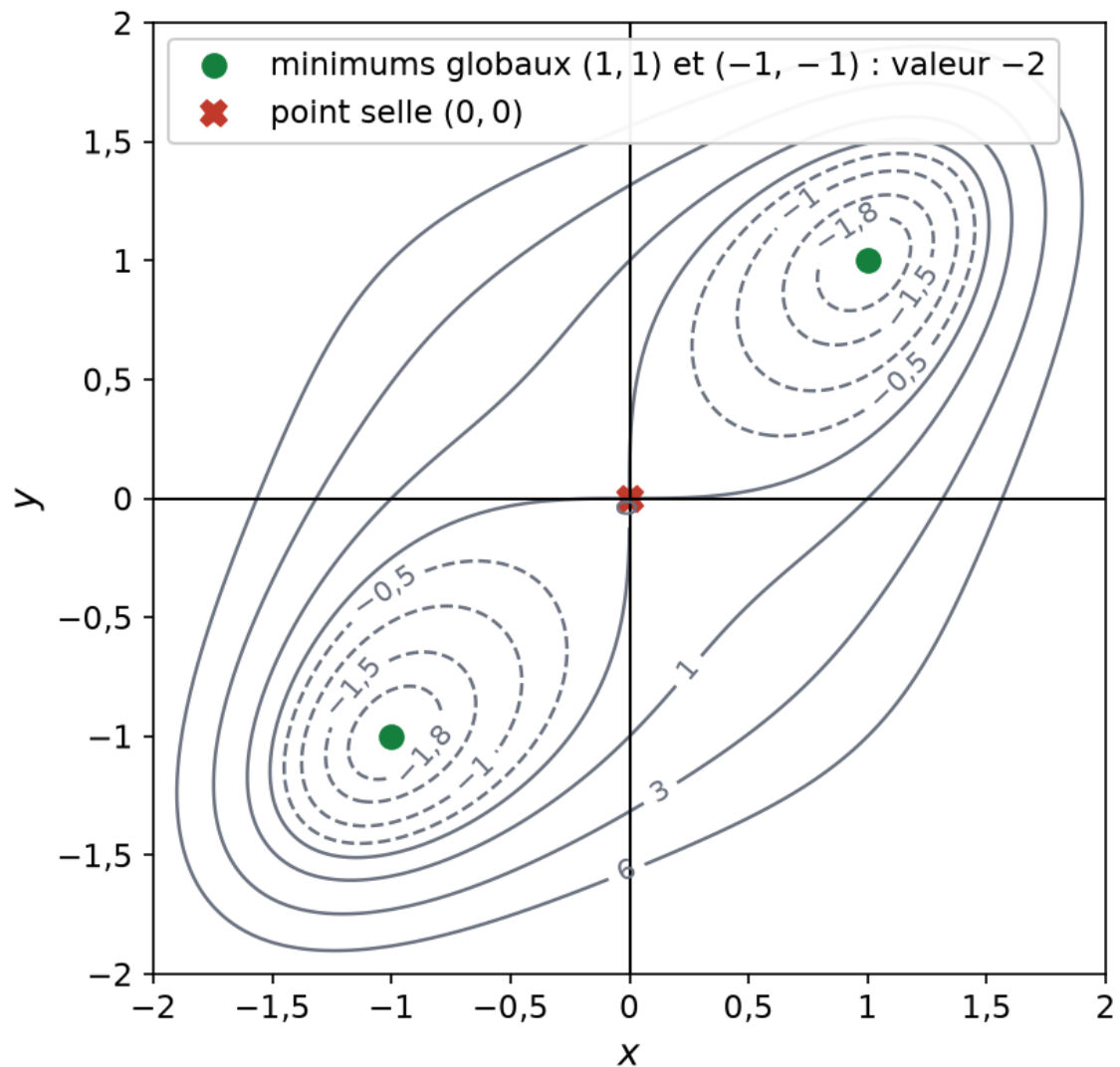
En $(0,0)$, $H = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ a pour déterminant $-16 < 0$. Ses valeurs propres 4 et -4 sont de signes opposés. **Donc $(0,0)$ est un point selle.**

En $(1,1)$ et en $(-1,-1)$, $H = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$ a pour déterminant $128 > 0$ et pour trace $24 > 0$. Elle est donc définie positive. **Ainsi f admet en ces deux points un minimum local strict, de valeur $f(1,1) = f(-1,-1) = -2$.**

c. D'une part, $4|xy| \leq 2(x^2 + y^2) = 2r^2$. D'autre part, $x^4 + y^4 \geq \frac{(x^2 + y^2)^2}{2} = \frac{r^4}{2}$, car $2(x^4 + y^4) - (x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 \geq 0$. Donc $f(x,y) \geq \frac{r^4}{2} - 2r^2$.

Pour $r > 2$, on a $\frac{r^4}{2} - 2r^2 = \frac{r^2}{2}(r^2 - 4) > 0 = f(0,0)$. Sur la boule fermée $\overline{B}(0,2)$, compacte, la fonction continue f atteint un minimum. Ce minimum est au plus $f(0,0) = 0$, donc c'est un minimum global sur $\mathbb{R}^2$.

Il est atteint en un point intérieur de la boule, donc en un point critique d'après l'exercice 1. En comparant $f(0,0) = 0$ et $f(\pm 1, \pm 1) = -2$: **le minimum global de f vaut -2 , atteint en $(1,1)$ et $(-1,-1)$.** Enfin, $f(x,0) = x^4 \rightarrow +\infty$: **f n'a pas de maximum global.**



d. On a $\nabla h(x,y) = (2x, 3y^2)$ et $\nabla k(x,y) = (2x, 4y^3)$, nuls en $(0,0)$. De plus, les deux hessiennes en $(0,0)$ valent $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: elles sont positives mais pas définies.

Pour h , on a $h(0,y) = y^3$, qui change de signe au voisinage de 0 . **Donc $(0,0)$ n'est pas un extremum de h .** Pour k , on a $k(x,y) \geq 0 = k(0,0)$. **Donc $(0,0)$ est un minimum global de k .**

Par conséquent, lorsque la hessienne est dégénérée, elle ne permet pas de conclure : il faut étudier la fonction à la main.

Barème : a) 0,5 point pour le système, 1 point pour sa résolution ; b) 0,5 point pour la hessienne, 1 point pour la nature des trois points ; c) 0,5 point pour la minoration, 0,5 point pour l'existence et la valeur du minimum global ; d) 0,5 point pour chaque fonction avec la conclusion.

Exercice 3 : Extrema de xyz sur une sphère (6 points)

- a. La sphère S est fermée, comme image réciproque du fermé $\{3\}$ par une fonction continue. Elle est aussi bornée, donc compacte en dimension finie. **La fonction continue f est donc bornée sur S et y atteint son maximum et son minimum.**
- b. On a $\nabla g(x,y,z) = 2(x,y,z)$, qui ne s'annule qu'en l'origine. Or $0 \notin S$. **Donc dg est non nulle en tout point de S : la condition de qualification est satisfaite.**
- c. D'après le théorème des extrema liés, si $f|_S$ admet un extremum en (x,y,z) , il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f = \lambda \nabla g$, soit :

$$yz = 2\lambda x, \quad xz = 2\lambda y, \quad xy = 2\lambda z, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3.$$

- d. En multipliant les trois premières équations respectivement par x , y et z , on obtient $xyz = 2\lambda x^2 = 2\lambda y^2 = 2\lambda z^2$.

Cas $\lambda = 0$. Alors $yz = xz = xy = 0$: au moins deux coordonnées sont nulles. Les solutions sont les six points $(\pm\sqrt{3}, 0, 0)$, $(0, \pm\sqrt{3}, 0)$ et $(0, 0, \pm\sqrt{3})$, où $f = 0$.

Cas $\lambda \neq 0$. Alors $x^2 = y^2 = z^2$. Avec la contrainte, $3x^2 = 3$, donc $x^2 = y^2 = z^2 = 1$. Les solutions sont les huit points $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Ils vérifient bien le système avec $\lambda = \frac{xyz}{2}$, et $f = \pm 1$.

- e. Les extrema de f sur S existent d'après a), et ils sont parmi les solutions du système d'après

c). Les valeurs possibles sont -1 , 0 et 1 . **Le maximum de f sur S vaut 1** , atteint en $(1,1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(-1,1,-1)$ et $(-1,-1,1)$. **Le minimum vaut -1** , atteint aux quatre points opposés.

f. Si $abc = 0$, l'inégalité est évidente. Sinon, posons $x = \sqrt{a}$, $y = \sqrt{b}$, $z = \sqrt{c}$, puis $\rho = \sqrt{\frac{a+b+c}{3}} > 0$. Le point $\frac{1}{\rho}(x,y,z)$ appartient à S , car la somme des carrés de ses coordonnées vaut $\frac{a+b+c}{\rho^2} = 3$.

D'après e), $\frac{xyz}{\rho^3} \leq 1$, donc $\sqrt{abc} \leq \rho^3$. En élevant au carré, $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$. Ainsi $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$: c'est l'inégalité arithmético-géométrique.

Erreur fréquente : diviser par x , y ou z sans vérifier qu'ils sont non nuls, ce qui fait perdre les six points où $\lambda = 0$.

Barème : a) 0,5 point pour la compacité, 0,5 point pour la conclusion ; b) 0,5 point ; c) 1 point ; d) 0,5 point pour le cas $\lambda = 0$, 1 point pour le cas $\lambda \neq 0$; e) 0,5 point pour la justification, 0,5 point pour les valeurs et les points ; f) 0,5 point pour la normalisation, 0,5 point pour la conclusion.

Exercice 4 : Problème : minimisation d'une fonctionnelle quadratique (5 points)

a. Comme A est symétrique, $\langle Ax, h \rangle = \langle Ah, x \rangle$. On obtient donc :

$$J(x+h) = J(x) + \langle Ax - b, h \rangle + \frac{1}{2} \langle Ah, h \rangle.$$

Le terme $\frac{1}{2} \langle Ah, h \rangle$ est un $O(|h|^2)$, et c'est une forme quadratique. **Donc**

$\nabla J(x) = Ax - b$ et la matrice hessienne de J vaut A en tout point.

- b. La partie $x \rightarrow -\langle b, x \rangle$ est linéaire : elle vérifie l'égalité sans terme correctif. Pour la partie quadratique $q(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle$, posons $d = x - y$, de sorte que $tx + (1-t)y = y + td$. Alors :

$$q(y + td) = q(y) + t\langle Ay, d \rangle + t^2 q(d), \quad tq(x) + (1-t)q(y) = q(y) + t\langle Ay, d \rangle + tq(d).$$

La différence vaut $(t^2 - t)q(d) = -\frac{t(1-t)}{2}\langle Ad, d \rangle$, d'où l'égalité demandée. Si $x \neq y$ et $t \in]0,1[$, ce terme est strictement négatif, car A est définie positive. **Donc J est strictement convexe.**

- c. D'après le théorème spectral, A se diagonalise dans une base orthonormée, et $\langle Ax, x \rangle \geq \lambda_1 |x|^2$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\langle b, x \rangle \leq |b| |x|$. **Donc** $J(x) \geq \frac{\lambda_1}{2} |x|^2 - |b| |x|$, et en particulier $J(x) \rightarrow +\infty$ quand $|x| \rightarrow +\infty$.

- d. **Existence.** Par c), il existe $R > 0$ tel que $J(x) > J(0) = 0$ pour $|x| > R$. Sur la boule fermée $\overline{B}(0, R)$, compacte, J continue atteint un minimum, qui est donc global.

Caractérisation. Ce minimum est atteint en un point intérieur, donc critique : $Ax^* - b = 0$. Comme A est inversible, $x^* = A^{-1}b$. **Unicité.** Si deux points distincts réalisaient le minimum m , la stricte convexité donnerait au milieu une valeur strictement inférieure à m : c'est absurde.

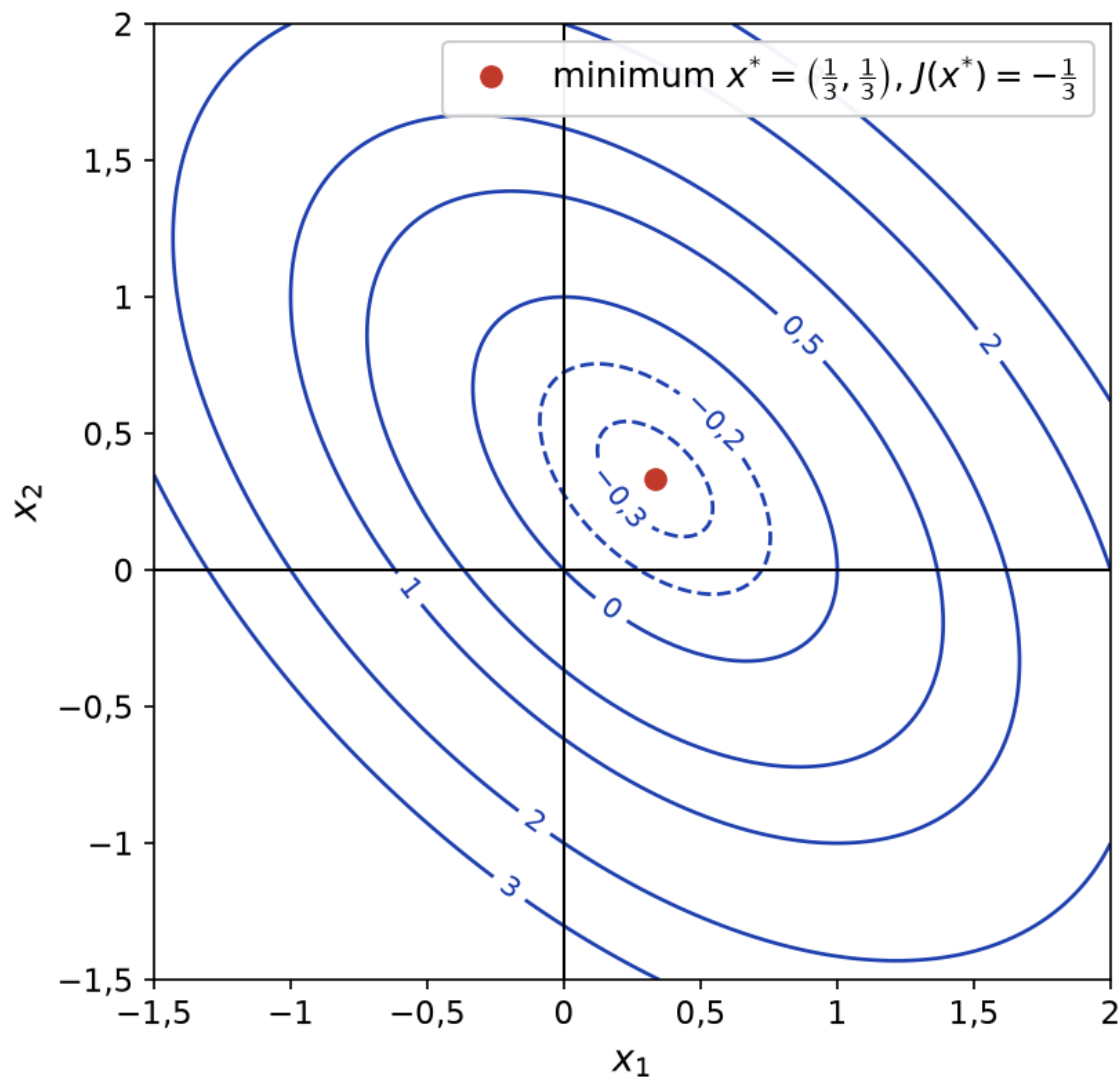
Enfin, $J(x^*) = \frac{1}{2}\langle b, A^{-1}b \rangle - \langle b, A^{-1}b \rangle$. **Donc** $J(x^*) = -\frac{1}{2}\langle A^{-1}b, b \rangle$.

- e. La matrice A est symétrique, de trace 4 et de déterminant 3. Ses valeurs propres sont 1 et 3, strictement positives : A est définie positive.

Le système $Ax = b$ s'écrit $2x_1 + x_2 = 1$ et $x_1 + 2x_2 = 1$. En soustrayant, $x_1 = x_2$, puis $3x_1 = 1$. **Donc** $x^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Ensuite, $\langle A^{-1}b, b \rangle = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Ainsi $J(x^*) = -\frac{1}{3}$.

On vérifie directement : $J(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - x_1 - x_2$, et $J\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{9} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$.



Barème : a) 0,5 point pour le développement, 0,5 point pour le gradient et la hessienne ; b) 0,5 point pour l'égalité, 0,5 point pour la stricte convexité ; c) 0,5 point pour la minoration spectrale, 0,5 point pour Cauchy-Schwarz ; d) 0,5 point pour l'existence, 0,25 point pour la caractérisation, 0,25 point pour l'unicité et la valeur ; e) 0,5 point pour la positivité de A , 0,5 point pour x^* et $J(x^*)$.

Après le corrigé du contrôle : extrema libres et multiplicateurs de Lagrange

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Inversion locale et extrema liés](#) » en L3 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [inversion locale et extrema liés](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L3 sur ce thème

- [Contrôle de maths L3 : inversion locale et fonctions implicites](#)