

Corrigé du contrôle de maths L3 : espaces métriques, ouverts, fermés, continuité

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours, fermés et continuité	4 points
Exercice 2 : Deux distances non usuelles	5 points
Exercice 3 : Intérieur, adhérence, frontière et densité	5 points
Exercice 4 : Problème, distance à une partie	6 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours, fermés et continuité (4 points)

- a. **Sens direct.** Supposons A fermée, c'est-à-dire $E \setminus A$ ouvert. Soit (a_n) une suite de A qui converge vers $x \in E$. Supposons par l'absurde $x \notin A$. Comme $E \setminus A$ est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset E \setminus A$. Par définition de la convergence, il existe un rang N tel que $d(a_N, x) < r$, donc $a_N \in B(x, r) \subset E \setminus A$, ce qui contredit $a_N \in A$. Donc $x \in A$.

Réciproque. Supposons que A contienne la limite de chacune de ses suites convergentes et montrons que $E \setminus A$ est ouvert. Soit $x \in E \setminus A$. Si aucune boule $B(x, r)$ n'était incluse dans $E \setminus A$, on pourrait choisir, pour tout $n \geq 1$, un point $a_n \in A \cap B(x, \frac{1}{n})$. Alors $d(a_n, x) < \frac{1}{n}$, donc $a_n \rightarrow x$, et l'hypothèse donne $x \in A$: contradiction. Il existe donc $r > 0$ avec $B(x, r) \subset E \setminus A$. **Ainsi $E \setminus A$ est ouvert et A est fermée.**

- b. **Sens direct.** Supposons f continue et soit V un ouvert de F . Soit $x \in f^{-1}(V)$. Comme $f(x) \in V$ et V est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(f(x), \varepsilon) \subset V$. Par continuité de f en x , il existe $\eta > 0$ tel que $d(x, y) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Donc $f(B(x, \eta)) \subset B(f(x), \varepsilon) \subset V$, soit $B(x, \eta) \subset f^{-1}(V)$: $f^{-1}(V)$ est ouvert.

Réciproque. Soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$. La boule ouverte $V = B(f(x), \varepsilon)$ est un ouvert de F (pour $z \in V$, la boule de centre z et de rayon $\varepsilon - \delta(f(x), z)$ est incluse dans V par l'inégalité triangulaire). Donc $f^{-1}(V)$ est un ouvert qui contient x : il existe $\eta > 0$ tel que $B(x, \eta) \subset f^{-1}(V)$, ce qui signifie $d(x, y) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$. **La fonction f est continue en x .**

Barème : a) 2 points : 1 point par sens (0,5 pour l'usage d'une boule, 0,5 pour la conclusion) ; b) 2 points : 1 point par sens, dont 0,25 pour la justification qu'une boule ouverte est un ouvert.

Exercice 2 : Deux distances non usuelles (5 points)

- a. L'application d est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et symétrique. Si $d(x, y) = 0$, alors $\arctan x = \arctan y$, donc $x = y$ car $\arctan$ est strictement croissante, donc injective. Enfin, par l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$:

$$d(x, z) = |(\arctan x - \arctan y) + (\arctan y - \arctan z)| \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Donc d est une distance sur $\mathbb{R}$.

- b. Pour tout entier n , $d(n, 0) = \arctan n < \frac{\pi}{2}$ alors que $|n - 0| = n$. Si une constante C convenait, on aurait $n \leq C \frac{\pi}{2}$ pour tout n , ce qui est absurde : **aucune constante C ne convient**, les deux distances ne sont pas équivalentes au sens métrique.

Montrons que l'identité $\text{id} : (\mathbb{R}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbb{R}, d)$ est un homéomorphisme. Comme

$$\arctan'(t) = \frac{1}{1+t^2} \leq 1, \text{ l'inégalité des accroissements finis donne } d(x, y) \leq |x - y| :$$

l'identité est 1-lipschitzienne, donc continue. Pour la réciproque, fixons x et $\varepsilon > 0$, et posons

$\theta = \arctan x$. La fonction $\tan$ est continue en θ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$: il existe $\eta > 0$ tel que

$|\varphi - \theta| < \eta$ entraîne $|\tan \varphi - x| < \varepsilon$ pour $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Si $d(x, y) < \eta$, on applique

ceci à $\varphi = \arctan y$ et on obtient $|y - x| < \varepsilon$. L'identité est donc continue dans les deux sens et, d'après l'exercice 1 b), un ouvert pour l'une des distances est l'image réciproque par une application continue d'un ouvert pour l'autre. **Les deux distances ont les mêmes ouverts.**

- c. Remarquons d'abord que $d_S(x, y) \geq |x - y|$ dans tous les cas, puisque $|x - y| \leq |x| + |y|$. La positivité et la symétrie sont claires. **Séparation** : si $d_S(x, y) = 0$, alors $|x - y| = 0$, donc $x = y$; réciproquement $d_S(x, x) = 0$ car (x, x) est liée.

Inégalité triangulaire : soit x, y, z .

- Si x et z sont alignés avec O :

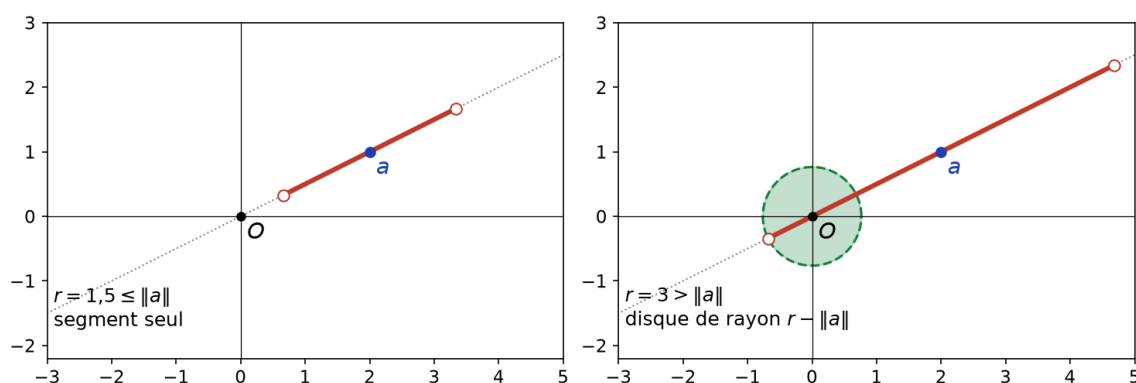
$$d_S(x, z) = |x - z| \leq |x - y| + |y - z| \leq d_S(x, y) + d_S(y, z).$$
- Sinon $d_S(x, z) = |x| + |z|$. Si x et y ne sont pas alignés avec O , alors $d_S(x, y) = |x| + |y|$ et, dans les deux cas de la définition, $d_S(y, z) \geq |z| - |y|$; en sommant, $d_S(x, y) + d_S(y, z) \geq |x| + |z|$. Le cas où y et z ne sont pas alignés avec O est symétrique.
- Reste le cas où (x, y) et (y, z) sont liées mais pas (x, z) : alors $y = 0$, sinon x et z appartiendraient tous deux à la droite $\mathbb{R}y$. On a alors

$$d_S(x, 0) + d_S(0, z) = |x| + |z| = d_S(x, z).$$

Donc d_S est une distance sur $\mathbb{R}^2$.

- d. Notons $u = \frac{a}{|a|}$. Comme $a \neq 0$, un point y est aligné avec a et O si et seulement si $y \in \mathbb{R}a$.
- Pour $y \in \mathbb{R}a$, la condition $|y - a| < r$ s'écrit $y = a + tu$ avec $|t| < r$: c'est le segment ouvert $S_r = \{a + tu : -r < t < r\}$.
 - Pour $y \notin \mathbb{R}a$, la condition est $|a| + |y| < r$, soit $|y| < r - |a|$, impossible si $r \leq |a|$.

Si $r \leq |a|$, $B_S(a, r) = S_r$ est un segment ouvert de la droite (Oa) , centré en a , de longueur $2r$. Si $r > |a|$, $B_S(a, r)$ est la réunion de S_r et du disque euclidien ouvert de centre O et de rayon $r - |a|$. (Les points de ce disque situés sur $\mathbb{R}a$ sont d'ailleurs dans S_r , car $|y - a| \leq |y| + |a| < r$.)



Barème : a) 1 point : 0,5 pour la séparation (injectivité de $\arctan$), 0,5 pour l'inégalité triangulaire ; b) 1,5 point : 0,5 pour la suite $x_n = n$, 1 point pour l'homéomorphisme (0,5 par sens) ; c) 1,5 point : 0,25 pour la séparation, 1,25 pour l'inégalité triangulaire avec les trois cas ; d) 1 point : 0,5 par cas.

Erreur fréquente : oublier le cas $y = 0$ dans l'inégalité triangulaire de la distance SNCF, où les deux couples sont liés sans que x et z le soient.

Exercice 3 : Intérieur, adhérence, frontière et densité (5 points)

a. **Intérieur.** Posons $U = \left\{ (x, y) : \begin{array}{l} x^2 + y^2 < 1, \\ y > 0 \end{array} \right\}$. C'est l'intersection des images réciproques des ouverts $] -\infty, 1[$ et $] 0, +\infty[$ par les applications continues $(x, y) \rightarrow x^2 + y^2$ et $(x, y) \rightarrow y$: c'est un ouvert inclus dans A , donc $U \subset \text{Int}(A)$. Les autres points de A sont les $(x, 0)$ avec $|x| < 1$ et le point $(2, 0)$; toute boule centrée en l'un d'eux contient un point $(x, -\varepsilon)$ avec $\varepsilon > 0$, qui n'est pas dans A . Donc $\text{Int}(A) = U$, le demi-disque ouvert supérieur.

Adhérence. Posons $K = \left\{ (x, y) : \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq 1, \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \cup \{(2, 0)\}$. C'est un fermé (intersection de deux fermés, réunie à un point) qui contient A , donc $\overline{A} \subset K$. Inversement, si $x^2 + y^2 \leq 1$ et $y \geq 0$, les points $\left(1 - \frac{1}{n}\right)(x, y)$ sont dans A et tendent vers (x, y) ; et $(2, 0) \in A$. Donc $\overline{A} = K$.

Frontière. $\text{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \text{Int}(A)$: c'est la réunion du demi-cercle $\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1, \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$, du segment $[-1, 1] \times \{0\}$ et du point $(2, 0)$.

- b. Tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient un rationnel et un irrationnel (densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$). Aucune boule n'est donc incluse dans $\mathbb{Q}$ et toute boule rencontre $\mathbb{Q}$: $\text{Int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ et $\text{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.
- c. Les ouverts (resp. fermés) de $\mathbb{Q}$ pour la distance induite sont les traces sur $\mathbb{Q}$ des ouverts (resp. fermés) de $\mathbb{R}$. Or $P = \mathbb{Q} \cap]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$, trace d'un ouvert. Comme $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont irrationnels, on a aussi $P = \mathbb{Q} \cap [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, trace d'un fermé. **P est donc ouvert et fermé dans $\mathbb{Q}$, sans être ni vide ni égal à $\mathbb{Q}$.**
- d. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $p_n = \lfloor 2^n x \rfloor$ et $x_n = \frac{p_n}{2^n} \in \mathbb{D}$. On a $p_n \leq 2^n x < p_n + 1$, donc $0 \leq x - x_n < \frac{1}{2^n}$, et $x_n \rightarrow x$. Tout réel est limite d'une suite de $\mathbb{D}$, donc $\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{R}$: **$\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.**

Barème : a) 2 points : 0,75 pour l'intérieur, 0,75 pour l'adhérence (0,25 pour le point isolé), 0,5 pour la frontière ; b) 1 point ; c) 1 point : 0,5 pour l'ouvert, 0,5 pour le fermé ; d) 1 point : 0,5 pour la suite, 0,5 pour l'encadrement.

Exercice 4 : Problème, distance à une partie (6 points)

- a. Soit $x, y \in E$. Pour tout $a \in A$, $d_A(x) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$, donc $d_A(x) - d(x, y) \leq d(y, a)$. Le réel $d_A(x) - d(x, y)$ minore l'ensemble des $d(y, a)$, il est donc inférieur à sa borne inférieure : $d_A(x) - d(x, y) \leq d_A(y)$. En échangeant x et y , on obtient $|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y)$: **d_A est 1-lipschitzienne, donc uniformément continue sur E .**
- b. Si $x \in \overline{A}$, toute boule $B(x, \varepsilon)$ rencontre A : il existe $a \in A$ avec $d(x, a) < \varepsilon$, donc $0 \leq d_A(x) < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, et $d_A(x) = 0$. Réciproquement, si $d_A(x) = 0$, par définition de la borne inférieure, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $a \in A$ avec $d(x, a) < \varepsilon$: toute boule centrée en x rencontre A , donc $x \in \overline{A}$. Ainsi $\overline{A} = d_A^{-1}(\{0\})$. Si F est un fermé non vide, $F = \overline{F} = d_F^{-1}(\{0\})$: **F est l'ensemble des zéros de la fonction continue d_F .**

- c. Les fonctions d_F et d_G sont positives. Si $d_F(x) + d_G(x) = 0$, alors $d_F(x) = d_G(x) = 0$, donc $x \in \overline{F} \cap \overline{G} = F \cap G = \emptyset$: impossible. Donc $d_F + d_G > 0$ sur E , et g , quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, est continue. Sur F , $d_F = 0$ donc $g = 0$; sur G , $d_G = 0$ et $d_F > 0$ donc $g = 1$.

Posons $U = g^{-1}\left(]-\infty, \frac{1}{2}[\right)$ et $V = g^{-1}\left(]\frac{1}{2}, +\infty[\right)$. Ce sont des ouverts par continuité de g (exercice 1 b), ils sont disjoints et $F \subset U$, $G \subset V$: **deux fermés disjoints sont séparés par deux ouverts disjoints.**

- d. L'ensemble $Z = \{x \in E : f(x) = h(x)\} = (f - h)^{-1}(\{0\})$ est fermé, comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue $f - h$. Il contient D , donc il contient $\overline{D} = E$. Ainsi $f = h$.

Barème : a) 1,5 point : 1 point pour l'inégalité (passage à la borne inférieure), 0,5 pour la continuité ; b) 1,5 point : 0,5 par inclusion, 0,5 pour la conséquence ; c) 2 points : 0,5 pour le dénominateur, 0,5 pour la continuité et les valeurs, 1 point pour les ouverts ; d) 1 point.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : espaces métriques, ouverts, fermés, continuité

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Espaces métriques](#) » en L3 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [espaces métriques](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).