

## Corrigé du contrôle de maths L3 : espaces de Hilbert, projection et Parseval

### Barème du contrôle

| Exercice                                                            | Points           |
|---------------------------------------------------------------------|------------------|
| Exercice 1 : Question de cours : projection et théorème de Riesz    | 4 points         |
| Exercice 2 : Projection sur le cône des fonctions positives         | 3,5 points       |
| Exercice 3 : Distance à un sous-espace de polynômes                 | 3,5 points       |
| Exercice 4 : Égalité de Parseval et somme des $1/n^4$               | 4 points         |
| Exercice 5 : Problème : transformée de Fourier sur la droite réelle | 5 points         |
| <b>Total</b>                                                        | <b>20 points</b> |

### Exercice 1 : Question de cours : projection et théorème de Riesz (4 points)

- a. **Théorème de projection.** Soit  $C$  un convexe fermé non vide de l'espace de Hilbert  $H$ . Pour tout  $x \in H$ , il existe un unique  $p \in C$  tel que  $|x - p| = \inf_{y \in C} |x - y|$ . On le note  $P_C(x)$ . De plus,  $p$  est caractérisé par :

$$p \in C \text{ et } \forall y \in C, \\ \operatorname{Re} \langle x - p, y - p \rangle \leq 0.$$

- b. **Sens direct.** Soit  $p = P_C(x)$  et  $y \in C$ . Pour  $t \in ]0, 1]$ , le point  $p + t(y - p)$  est dans  $C$ , car  $C$  est convexe. Par minimalité de  $p$  :

$$|x - p - t(y - p)|^2 \geq |x - p|^2, \text{ soit } -2t \operatorname{Re}\langle x - p, y - p \rangle + t^2 |y - p|^2 \geq 0.$$

On divise par  $t > 0$ , puis on fait tendre  $t$  vers  $0$ . On obtient  $\operatorname{Re}\langle x - p, y - p \rangle \leq 0$ .

**Réciproque.** Supposons l'inégalité vraie pour tout  $y \in C$ . Pour  $y \in C$ , on écrit  $x - y = (x - p) - (y - p)$ , d'où :

$$|x - y|^2 = |x - p|^2 - 2 \operatorname{Re}\langle x - p, y - p \rangle + |y - p|^2 \geq |x - p|^2.$$

**Donc  $p$  réalise la distance de  $x$  à  $C$ , et  $p = P_C(x)$ .**

- c. **Théorème de Riesz.** Pour toute forme linéaire continue  $\varphi$  sur  $H$ , il existe un unique  $a \in H$  tel que  $\varphi(x) = \langle x, a \rangle$  pour tout  $x \in H$ .

**Existence.** Si  $\varphi = 0$ , on prend  $a = 0$ . Sinon,  $F = \ker \varphi$  est un sous-espace fermé (car  $\varphi$  est continue) et distinct de  $H$ . Soit  $x_0 \notin F$  et  $p = P_F(x_0)$ . On pose  $z = x_0 - p$ , qui est non nul.

Pour  $w \in F$ , le vecteur  $y = p + w$  est dans  $F$ . La question b) donne  $\operatorname{Re}\langle z, w \rangle \leq 0$ . En remplaçant  $w$  par  $-w$  puis par  $iw$ , on obtient  $\langle z, w \rangle = 0$ . Ainsi  $z \in F^\perp$ .

Soit  $x \in H$ . Le vecteur  $x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(z)}z$  appartient à  $F$ , donc il est orthogonal à  $z$ . Par conséquent  $\langle x, z \rangle = \frac{\varphi(x)}{\varphi(z)}|z|^2$ . On pose alors  $a = \frac{\overline{\varphi(z)}}{|z|^2}z$  : on obtient bien  $\langle x, a \rangle = \frac{\varphi(z)}{|z|^2} \langle x, z \rangle = \varphi(x)$ .

**Unicité.** Si  $a$  et  $a'$  conviennent, alors  $\langle x, a - a' \rangle = 0$  pour tout  $x$ . Avec  $x = a - a'$ , on obtient  $a = a'$ .

Barème : a) 0,5 point pour existence et unicité, 0,5 point pour la caractérisation ; b) 1 point pour le sens direct, 0,5 point pour la réciproque ; c) 0,5 point pour l'énoncé, 0,5 point pour  $z \in \mathbb{F}^\perp$ , 0,5 point pour la construction de  $\alpha$  et l'unicité.

## Exercice 2 : Projection sur le cône des fonctions positives (3,5 points)

---

- a. La fonction nulle est dans  $\mathcal{C}$ , donc  $\mathcal{C}$  est non vide. Soient  $f, g \in \mathcal{C}$  et  $\lambda \in [0,1]$ . Alors  $\lambda f + (1 - \lambda)g \geq 0$  presque partout. **Donc  $\mathcal{C}$  est convexe.**

Soit  $(f_n)$  une suite de  $\mathcal{C}$  qui converge vers  $f$  dans  $L^2$ . D'après le théorème de Riesz-Fischer, une sous-suite  $(f_{n_k})$  converge vers  $f$  presque partout. Or chaque  $f_{n_k}$  est positive presque partout, et une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable. Par passage à la limite,  $f \geq 0$  presque partout. **Donc  $\mathcal{C}$  est fermé.**

- b. D'abord,  $0 \leq f^+ \leq |f|$ , donc  $f^+ \in L^2$  et  $f^+ \in \mathcal{C}$ . Ensuite,  $f - f^+ = -f^-$ . De plus,  $f^+ f^- = 0$  partout, car l'une des deux fonctions est nulle en chaque point. Pour tout  $g \in \mathcal{C}$  :

$$\langle f - f^+, g - f^+ \rangle = - \int_0^1 f^- g + \int_0^1 f^- f^+ = - \int_0^1 f^- g \leq 0,$$

car  $f^- \geq 0$  et  $g \geq 0$  presque partout. Par la caractérisation de l'exercice 1,  $P_{\mathcal{C}}(f) = f^+$ .

- c. La distance vaut  $|f - f^+| = |f^-|$ . Ici  $f^-(x) = 1 - 2x$  sur  $[0, \frac{1}{2}]$  et 0 ailleurs. Avec  $u = 1 - 2x$  :

$$|f^-|^2 = \int_0^{1/2} (1-2x)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{6}.$$

Donc la distance de  $f$  à  $C$  vaut  $\frac{1}{\sqrt{6}}$ .

Barème : a) 0,5 point pour la convexité, 1 point pour la fermeture (sous-suite presque partout exigée) ; b) 0,5 point pour  $f^+ \in C$ , 1 point pour l'inégalité ; c) 0,5 point.

### **Exercice 3 : Distance à un sous-espace de polynômes (3,5 points)**

---

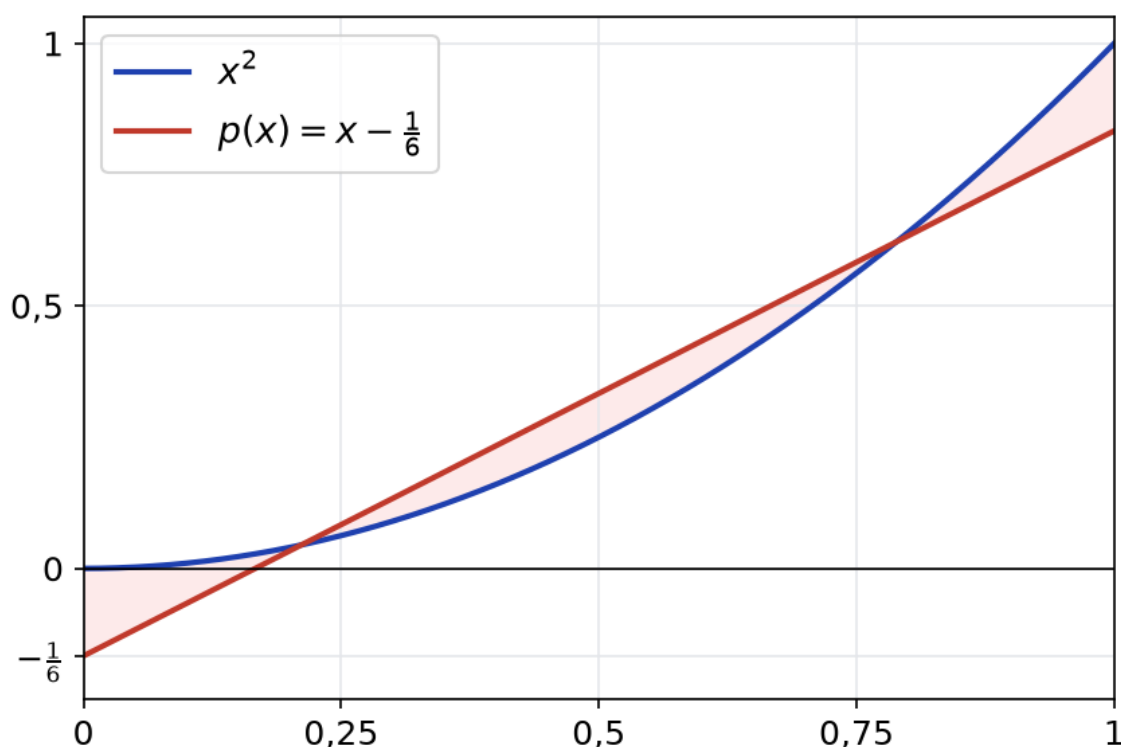
a. Le sous-espace  $E$  est de dimension finie 2. Il est donc complet, donc fermé dans  $H$ . C'est aussi un convexe non vide. **Le théorème de projection s'applique :  $P$  existe et est unique.**

b. Le projeté  $p$  est caractérisé par  $p \in E$  et  $x^2 - p \perp E$ . Il suffit de tester sur la base

$(1, x)$ . Avec  $p(x) = a + bx$ , on a  $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$  et  $\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$ . On obtient ainsi :

$$\langle x^2 - p, 1 \rangle = 0 \Leftrightarrow a + \frac{b}{2} = \frac{1}{3}, \quad \langle x^2 - p, x \rangle = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{2} + \frac{b}{3} = \frac{1}{4}.$$

La seconde équation, multipliée par 2, donne  $a + \frac{2b}{3} = \frac{1}{2}$ . On lui retranche la première :  $\frac{b}{6} = \frac{1}{6}$ , donc  $b = 1$ . Puis  $a = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$ . **Ainsi**  $p(x) = x - \frac{1}{6}$ .



- c. Le minimum cherché vaut  $|x^2 - p|^2$ . Comme  $x^2 - p$  est orthogonal à  $p \in E$ , on a  $|x^2 - p|^2 = \langle x^2 - p, x^2 \rangle$ . Donc :

$$|x^2 - p|^2 = \int_0^1 x^4 dx - \int_0^1 x^3 dx + \frac{1}{6} \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{18} = \frac{36 - 45 + 10}{180} = \frac{1}{180}.$$

**Le minimum vaut  $\frac{1}{180}$ , atteint pour  $a = -\frac{1}{6}$  et  $b = 1$ .** La distance de  $x^2$  à  $E$  vaut donc  $\frac{1}{\sqrt{180}} = \frac{1}{6\sqrt{5}}$ .

- d. D'abord  $|1|^2 = 1$ , donc  $e_0 = 1$ . Ensuite,  $x - \langle x, e_0 \rangle e_0 = x - \frac{1}{2}$ , de norme au carré  $\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{12}$ . Donc  $e_1(x) = \sqrt{12} \left(x - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} (2x - 1)$ .

Alors  $\langle x^2, e_0 \rangle = \frac{1}{3}$  et  $\langle x^2, e_1 \rangle = \sqrt{3} \left(\frac{2}{4} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}$ . On retrouve

$$p = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} \times \sqrt{3} (2x - 1) = x - \frac{1}{6}.$$

Barème : a) 0,5 point ; b) 0,5 point pour les équations normales, 1 point pour la résolution ; c) 1 point ; d) 0,5 point.

### **Exercice 4 : Égalité de Parseval et somme des $1/n^4$ (4 points)**

---

- a. **Égalité de Parseval.** Si  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est une base hilbertienne de  $H$ , alors pour tout  $f \in H$ , la famille  $(|\langle f, e_n \rangle|^2)$  est sommable et :

$$\|f\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle f, e_n \rangle|^2.$$

De plus,  $f = \sum_n \langle f, e_n \rangle e_n$ , la série convergeant dans  $H$ .

- b. D'abord,  $c_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (t - \pi)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{(t - \pi)^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \times \frac{2\pi^3}{3}$ , donc  $c_0(f) = \frac{\pi^2}{3}$ .

Soit  $n \neq 0$ . On pose  $u = t - \pi$ . Comme  $e^{-in\pi} = (-1)^n$  et que  $u^2 \sin(nu)$  est impaire :

$$c_n(f) = \frac{(-1)^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u^2 e^{-inu} du = \frac{(-1)^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u^2 \cos(nu) du.$$

Une première intégration par parties donne, car  $\sin(\pm n\pi) = 0$  :

$$\int_{-\pi}^{\pi} u^2 \cos(nu) \, du = -\frac{2}{n} \int_{-\pi}^{\pi} u \sin(nu) \, du.$$

Une seconde intégration par parties donne ensuite :

$$\int_{-\pi}^{\pi} u \sin(nu) \, du = \left[ -\frac{u \cos(nu)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nu) \, du = -\frac{2\pi(-1)^n}{n}.$$

Ainsi  $\int_{-\pi}^{\pi} u^2 \cos(nu) \, du = \frac{4\pi(-1)^n}{n^2}$ . Par conséquent,  $c_n(f) = \frac{(-1)^n}{2\pi} \times \frac{4\pi(-1)^n}{n^2} = \frac{2}{n^2}$ .

c. D'une part,  $|f|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (t - \pi)^4 \, dt = \frac{1}{2\pi} \times \frac{2\pi^5}{5} = \frac{\pi^4}{5}$ . D'autre part, l'égalité de Parseval donne :

$$\frac{\pi^4}{5} = \left( \frac{\pi^2}{3} \right)^2 + \sum_{n \neq 0} \frac{4}{n^4} = \frac{\pi^4}{9} + 8 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Donc  $8 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9} = \frac{4\pi^4}{45}$ . Ainsi  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ .

On remarque que seule la convergence dans  $L^2$  sert ici : aucune convergence ponctuelle de la série de Fourier n'est utilisée.

**Erreur fréquente :** oublier que les indices  $n$  et  $-n$  donnent le même terme. La somme sur  $n \neq 0$  vaut deux fois la somme sur  $n \geq 1$ .

Barème : a) 1 point ; b) 0,5 point pour  $C_0$ , 1 point pour  $C_n$  (intégrations par parties justifiées) ; c) 0,5 point pour  $|f|^2$ , 1 point pour Parseval et le résultat.

## **Exercice 5 : Problème : transformée de Fourier sur la droite réelle (5 points)**

---

- a. La fonction  $f$  est continue et intégrable sur  $\mathbb{R}$ . On coupe l'intégrale en 0. Comme  $\operatorname{Re}(1 \pm i\xi) = 1 > 0$  :

$$\widehat{f}(\xi) = \int_0^{+\infty} e^{-x(1+i\xi)} dx + \int_0^{+\infty} e^{-x(1-i\xi)} dx = \frac{1}{1+i\xi} + \frac{1}{1-i\xi}.$$

**Donc**  $\widehat{f}(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}.$

- b. **Dérivation sous l'intégrale.** On pose  $k(x, \xi) = e^{-x^2/2} e^{-ix\xi}$ . Pour tout  $x$ ,  $\xi \rightarrow k(x, \xi)$  est de classe  $C^1$ , et  $|\partial_\xi k(x, \xi)| = |x| e^{-x^2/2}$ . Cette fonction est intégrable sur  $\mathbb{R}$  et ne dépend pas de  $\xi$ . Par le théorème de dérivation sous le signe intégrale,  $\widehat{g}$  est de classe  $C^1$  et :

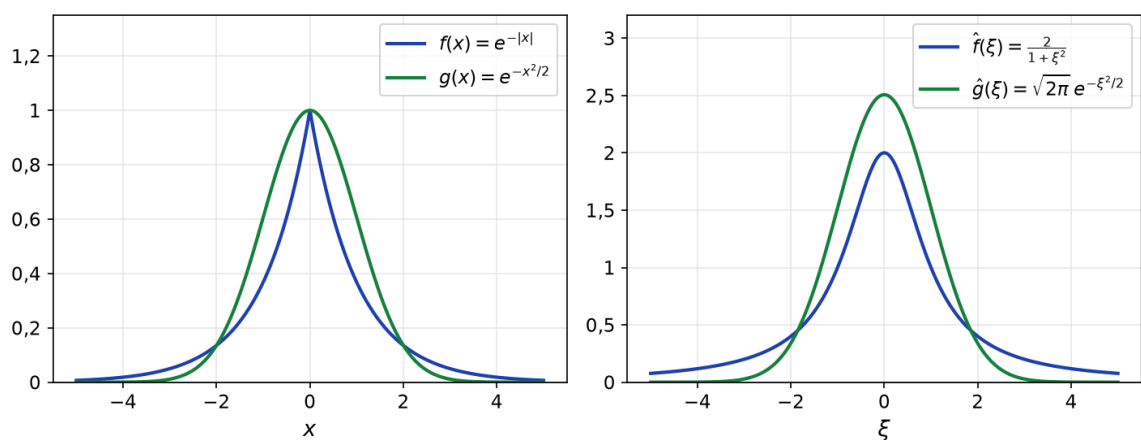
$$\widehat{g}'(\xi) = i \int_{\mathbb{R}} (-x e^{-x^2/2}) e^{-ix\xi} dx.$$

On intègre par parties, avec  $-x e^{-x^2/2} = (e^{-x^2/2})'$ . Le crochet est nul, car

$e^{-x^2/2} \rightarrow 0$  en  $\pm\infty$ . Ainsi :

$$\int_{\mathbb{R}} (-x e^{-x^2/2}) e^{-ix\xi} dx = - \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} (-i\xi) e^{-ix\xi} dx = i\xi \mathcal{G}(\xi).$$

Donc  $\mathcal{G}'(\xi) = i \times i\xi \mathcal{G}(\xi) = -\xi \mathcal{G}(\xi)$ . Par conséquent,  $(\mathcal{G}(\xi) e^{\xi^2/2})' = 0$  sur  $\mathbb{R}$ , qui est un intervalle. Enfin,  $\mathcal{G}(0) = \sqrt{2\pi}$ . **Donc**  $\mathcal{G}(\xi) = \sqrt{2\pi} e^{-\xi^2/2}$ .



c. La fonction  $f$  est dans  $L^1 \cap L^2$ . De plus,  $\int_{\mathbb{R}} e^{-2|x|} dx = 2 \times \frac{1}{2} = 1$ . Le théorème de Plancherel donne donc :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{4}{(1+\xi^2)^2} d\xi = 2\pi \times 1.$$

**Donc**  $\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^2} = \frac{\pi}{2}.$

d. **Théorème d'inversion.** Si  $h \in L^1(\mathbb{R})$  et  $\widehat{h} \in L^1(\mathbb{R})$ , alors  $h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$  pour presque tout  $x$ . L'égalité a lieu en tout point où  $h$  est continue.

Ici  $f$  est intégrable et continue sur  $\mathbb{R}$ . De plus,  $\widehat{f}(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}$  est intégrable. Donc, pour tout réel  $x$  :

$$e^{-|x|} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{1+\xi^2} e^{ix\xi} d\xi.$$

La partie imaginaire de l'intégrale est nulle, car  $\xi \rightarrow \frac{\sin(x\xi)}{1+\xi^2}$  est impaire. **Donc**

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(x\xi)}{1+\xi^2} d\xi = \pi e^{-|x|}.$$

Barème : a) 1 point ; b) 1 point pour la dérivation sous l'intégrale avec domination, 0,5 point pour l'intégration par parties, 0,5 point pour la résolution ; c) 1 point ; d) 0,5 point pour l'énoncé et les hypothèses, 0,5 point pour le résultat.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

## **Après le corrigé du contrôle : espaces de Hilbert, projection et Parseval**

---

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Espaces de Hilbert](#) » en L3 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [espaces de hilbert](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).