

Corrigé du contrôle de maths L3 : différentielle de Fréchet et formules de Taylor

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : différentiabilité et accroissements finis	3 points
Exercice 2 : Différentielles d'applications matricielles	5 points
Exercice 3 : Dérivées directionnelles sans différentiabilité	4 points
Exercice 4 : Théorème de Schwarz et contre-exemple	3 points
Exercice 5 : Problème : formule de Taylor et majoration du reste	5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : différentiabilité et accroissements finis (3 points)

- a. On dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire continue $L : E \rightarrow F$ telle que

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + |h| \varepsilon(h), \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Cette application L est alors unique : on la note $df(a)$.

Supposons f différentiable en a . Pour h assez petit, l'inégalité triangulaire donne

$$|f(a+h) - f(a)| \leq |L| |h| + |h| |\varepsilon(h)|.$$

Or L est continue, donc $|L|$ est fini, et $\varepsilon(h) \rightarrow 0$. Ainsi le membre de droite tend vers 0.

Par conséquent, $f(a+h) \rightarrow f(a)$ quand $h \rightarrow 0$: f est continue en a .

- b. **Inégalité des accroissements finis.** Soit U un ouvert convexe de E et $f:U \rightarrow F$ différentiable sur U . S'il existe $M \geq 0$ tel que $|df(x)| \leq M$ pour tout $x \in U$ (norme d'opérateur), alors

$$\forall a, b \in U, |f(b) - f(a)| \leq M |b - a|.$$

Si $df(x) = 0$ pour tout $x \in U$, on peut prendre $M = 0$. Alors, pour tous $a, b \in U$, on obtient $|f(b) - f(a)| \leq 0$, donc $f(b) = f(a)$. **Ainsi f est constante sur U .**

Barème : a) 0,5 point pour la définition (linéarité et continuité de L , reste en petit o), 1 point pour la preuve de la continuité ; b) 1 point pour l'énoncé complet avec la convexité, 0,5 point pour la conséquence.

Exercice 2 : Différentielles d'applications matricielles (5 points)

- a. Pour $A, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on développe sans commuter les produits :

$$f(A+H) = (A+H)^2 = A^2 + AH + HA + H^2.$$

L'application $L: H \rightarrow AH + HA$ est linéaire. Elle est continue car $|L(H)| \leq 2|A| |H|$. De plus, la sous-multiplicativité donne $|H^2| \leq |H|^2$, donc $H^2 = o(|H|)$.

Ainsi f est différentiable en A et $df(A)(H) = AH + HA$.

b. D'abord, pour A et $A+H$ inversibles, on factorise :

$$(A+H)^{-1} - A^{-1} = (A+H)^{-1}(A - (A+H))A^{-1} = -(A+H)^{-1} H A^{-1}.$$

Ensuite, on en déduit :

$$(A+H)^{-1} - A^{-1} + A^{-1} H A^{-1} = (A^{-1} - (A+H)^{-1}) H A^{-1} = (A+H)^{-1} H A^{-1} H A^{-1}.$$

C'est l'égalité demandée. Comme $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert, $A+H$ est inversible pour H assez petite. Par continuité de l'inverse, $(A+H)^{-1} \rightarrow A^{-1}$, donc $|(A+H)^{-1}| \leq 2|A^{-1}|$ pour H voisine de 0 . Par conséquent,

$$\|(A+H)^{-1} - A^{-1} + A^{-1} H A^{-1}\| \leq 2|A^{-1}|^3 |H|^2 = o(|H|).$$

Enfin, $H \rightarrow -A^{-1} H A^{-1}$ est linéaire, donc continue en dimension finie. **Ainsi g est différentiable en A et $dg(A)(H) = -A^{-1} H A^{-1}$.**

c. Par la formule de Leibniz, $\det(I_n + H) = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (\delta_{\sigma(i),i} + h_{\sigma(i),i})$.

Le terme $\sigma = \text{id}$ vaut $\prod_i (1 + h_{ii}) = 1 + \text{tr}(H) + R_1(H)$, où R_1 est une somme de monômes de degré au moins 2 en les coefficients de H . En effet, une permutation $\sigma \neq \text{id}$ déplace au moins deux indices. Son terme contient donc au moins deux coefficients de H : il est aussi de degré au moins 2.

Toutes les normes étant équivalentes en dimension finie, un polynôme sans terme de degré inférieur à 2 est un $O(|H|^2)$. **Donc** $\det(I_n + H) = 1 + \text{tr}(H) + o(|H|)$.

Soit maintenant A inversible. On écrit $A + H = A(I_n + A^{-1}H)$ et $|A^{-1}H| \leq |A^{-1}| |H|$. Alors

$$\det(A+H) = \det(A)(1 + \text{tr}(A^{-1}H) + o(|H|)).$$

L'application $H \rightarrow \det(A)\text{tr}(A^{-1}H)$ est linéaire. **Donc**
 $d(\det)(A)(H) = \det(A) \text{tr}(A^{-1}H)$.

Erreur fréquente : écrire $df(A)(H) = 2AH$. Les matrices A et H ne commutent pas en général.

Barème : a) 1 point pour le développement et le reste, 0,5 point pour la conclusion ; b) 0,75 point pour l'égalité, 1 point pour la majoration du reste avec la continuité de l'inverse, 0,25 point pour la conclusion ; c) 0,75 point pour le développement de $\det(I_n + H)$, 0,75 point pour le passage à A inversible.

Exercice 3 : Dérivées directionnelles sans différentiabilité (4 points)

a. Soit $v = (h, k) \neq (0, 0)$ et $t \neq 0$. Comme $f(0, 0) = 0$, on étudie le taux d'accroissement.

Si $k \neq 0$, on a $f(th, tk) = \frac{t^3 h^2 k}{t^4 h^4 + t^2 k^2} = \frac{t h^2 k}{t^2 h^4 + k^2}$, donc

$$\frac{f(th,tk) - f(0,0)}{t} = \frac{h^2k}{t^2h^4 + k^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{h^2}{k}.$$

Si $k = 0$, alors $h \neq 0$ et $f(th,0) = 0$ pour tout t , donc le taux vaut 0 .

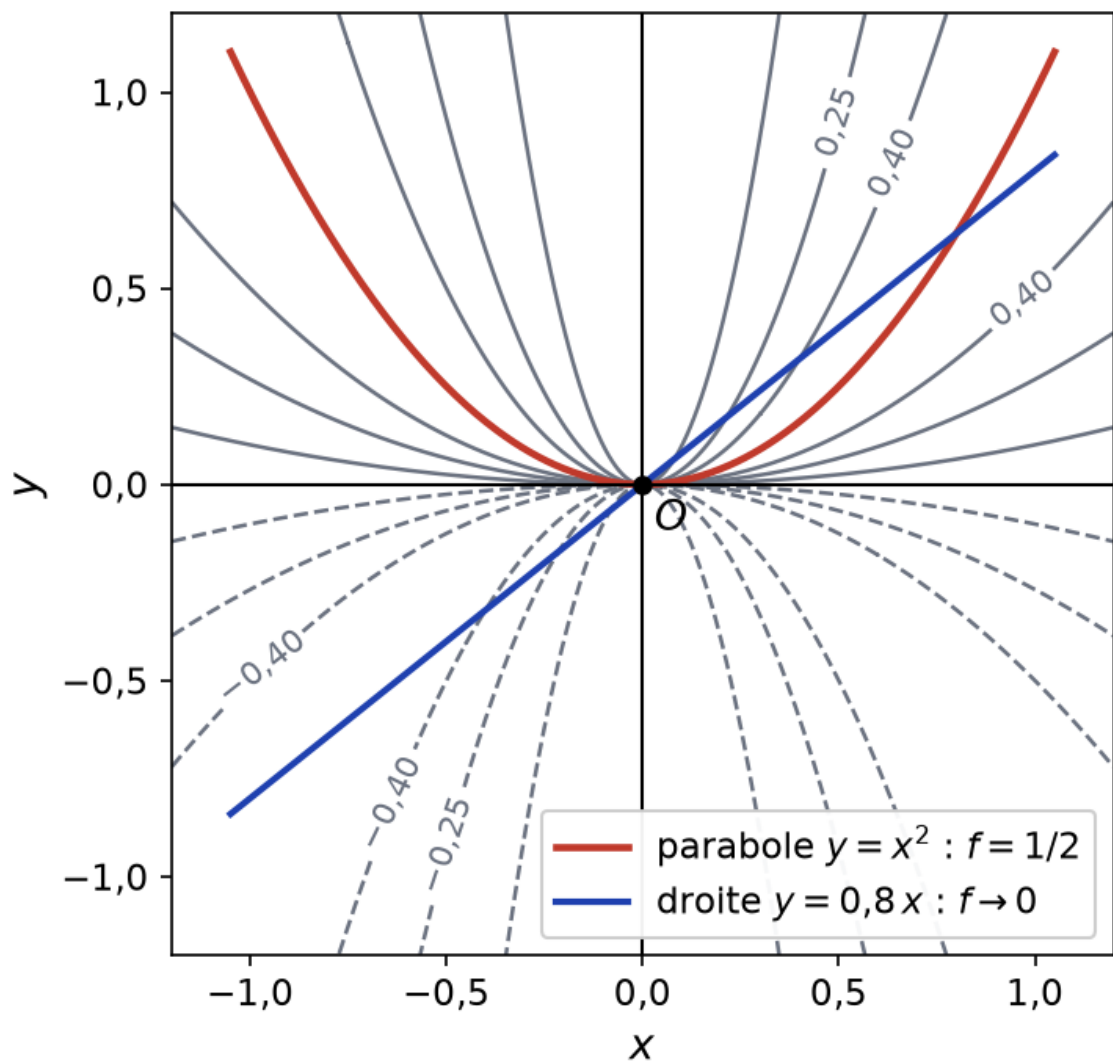
Ainsi $D_v f(0,0) = \frac{h^2}{k}$ **si** $k \neq 0$, **et** $D_v f(0,0) = 0$ **si** $k = 0$.

- b. Avec $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$, on trouve $De_1 f(0,0) = 0$ et $De_2 f(0,0) = 0$.
Cependant, $De_1 + e_2 f(0,0) = 1 \neq 0 + 0$. **L'application** $v \rightarrow D_v f(0,0)$ **n'est donc pas linéaire.**

Or, si f était différentiable en $(0,0)$, on aurait $D_v f(0,0) = df(0,0)(v)$, qui est linéaire en v . **Par conséquent, f n'est pas différentiable en $(0,0)$.**

- c. Pour $x \neq 0$: $f(x,x^2) = \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}$.

Donc $f(x,x^2) \rightarrow \frac{1}{2}$ quand $x \rightarrow 0$, alors que $(x,x^2) \rightarrow (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. **La fonction f n'est pas continue en $(0,0)$** , ce qui confirme la non-différentiabilité (exercice 1).
Sur la figure, la parabole est une ligne de niveau, alors que f tend vers 0 le long de toute droite.



- d. D'après a), $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = D_{e_1}f(0,0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = D_{e_2}f(0,0) = 0$. **Les deux dérivées partielles existent et sont nulles, mais f n'est même pas continue.** En effet, l'existence des dérivées partielles en un point ne donne aucune information dans les autres directions. Il faudrait leur continuité sur un voisinage pour conclure que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Barème : a) 1 point pour le cas $k \neq 0$, 0,5 point pour le cas $k = 0$; b) 0,5 point pour la non-linéarité, 0,5 point pour la conclusion ; c) 0,5 point pour le calcul, 0,5 point pour la discontinuité ; d) 0,25 point pour les valeurs, 0,25 point pour la justification.

Exercice 4 : Théorème de Schwarz et contre-exemple (3 points)

- a. Pour $h \neq 0$, $g(h,0) = 0$, donc $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 0$. De même, $g(0,k) = 0$, donc $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0$.

Ensuite, $|x^2 - y^2| \leq x^2 + y^2$, donc $|g(x,y)| \leq |xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2}$, car $(|x| - |y|)^2 \geq 0$.
Ainsi $g(x,y) - g(0,0) - 0 = O(|(x,y)|^2) = o(|(x,y)|)$. **Donc g est différentiable en $(0,0)$ et $dg(0,0) = 0$.**

- b. Soit $y \neq 0$. Comme $g(0,y) = 0$, on a pour $h \neq 0$:

$$\frac{g(h,y) - g(0,y)}{h} = \frac{y(h^2 - y^2)}{h^2 + y^2} \xrightarrow{h \rightarrow 0} -y.$$

De même, pour $x \neq 0$ et $k \neq 0$: $\frac{g(x,k) - g(x,0)}{k} = \frac{x(x^2 - k^2)}{x^2 + k^2} \rightarrow x$.

Donc $\frac{\partial g}{\partial x}(0,y) = -y$ **et** $\frac{\partial g}{\partial y}(x,0) = x$, formules encore vraies en 0 d'après a).

- c. La fonction $y \rightarrow \frac{\partial g}{\partial x}(0,y) = -y$ a pour dérivée -1 . De même, $x \rightarrow \frac{\partial g}{\partial y}(x,0) = x$ a pour dérivée 1 . **Ainsi** $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$ **et** $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$.

Théorème de Schwarz. Si g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, alors pour tout $a \in U$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(a)$.

Ici, les dérivées croisées diffèrent en $(0,0)$. Il n'y a donc pas de contradiction : **g n'est de**

classe $\mathcal{C}^2$ sur aucun voisinage de $(0,0)$. Ses dérivées secondes croisées ne sont pas continues en l'origine, bien que g soit $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Barème : a) 0,5 point pour les dérivées partielles, 0,5 point pour la majoration et la différentiabilité ; b) 0,5 point par dérivée partielle ; c) 0,5 point pour les dérivées croisées, 0,5 point pour l'énoncé de Schwarz et l'explication.

Exercice 5 : Problème : formule de Taylor et majoration du reste (5 points)

- a. Les fonctions $(x,y) \rightarrow e^x$ et $(x,y) \rightarrow \cos y$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, comme composées de fonctions usuelles et des projections. Leur produit φ est donc $\mathcal{C}^\infty$, en particulier $\mathcal{C}^2$.

$$\nabla \varphi(x,y) = \begin{pmatrix} \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}, \quad \text{Hess } \varphi(x,y) = e^x \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix}.$$

En $(0,0)$: $\nabla \varphi(0,0) = (1, 0)$ **et** $\text{Hess } \varphi(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- b. Comme φ est $\mathcal{C}^2$, la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 s'applique :

$$\varphi(x,y) = \varphi(0,0) + x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + o(x^2 + y^2).$$

Ainsi $e^x \cos y = 1 + x + \frac{x^2 - y^2}{2} + o(x^2 + y^2)$.

- c. D'après b), $\frac{\varphi(x,y) - 1 - x}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - y^2}{2(x^2 + y^2)} + o(1)$.

Le long de l'axe $y = 0$, cette quantité tend vers $\frac{1}{2}$. Le long de l'axe $x = 0$, elle tend vers $-\frac{1}{2}$. **Les deux limites diffèrent, donc la limite n'existe pas.**

- d. L'ensemble P est un demi-plan ouvert, donc un ouvert convexe. Pour une fonction à valeurs réelles, la norme d'opérateur de $d\varphi(x,y)$ est la norme euclidienne du gradient :

$$|\nabla\varphi(x,y)| = e^x \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x \leq e \text{ sur } P.$$

Par l'inégalité des accroissements finis sur le convexe P , $|\varphi(b) - \varphi(a)| \leq e |b - a|$.

- e. Posons $S = \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix}$. Cette matrice est symétrique et vérifie $S^2 = I_2$. Ses valeurs propres valent donc 1 ou -1 , et sa norme d'opérateur euclidienne vaut 1 . **Par conséquent, $|\text{Hess } \varphi(x,y)| = e^x$.**

Sur la boule unité fermée, qui est convexe, on a $|x| \leq 1$, donc $|\text{Hess } \varphi| \leq e$. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 sur le segment $[0, h]$, avec $h = (x,y)$, donne alors

$$|\varphi(h) - \varphi(0) - d\varphi(0)(h)| \leq \frac{1}{2} \sup_{[0,h]} |\text{Hess } \varphi| |h|^2.$$

Ainsi $|e^x \cos y - 1 - x| \leq \frac{e}{2}(x^2 + y^2)$ pour $x^2 + y^2 \leq 1$. Ce résultat est cohérent avec c) : le quotient reste borné, sans avoir de limite.

Barème : a) 0,25 point pour la régularité, 0,5 point pour le gradient et la hessienne, 0,25 point pour les valeurs en $(0,0)$; b) 1 point ; c) 0,5 point par chemin avec la conclusion ; d) 0,5 point pour la convexité et la borne du gradient, 0,5 point pour l'inégalité ; e) 0,5 point pour la norme de la hessienne, 0,5 point pour la majoration finale.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : différentielle de Fréchet et formules de Taylor

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours [« Calcul différentiel » en L3](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [calcul différentiel](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).