

Corrigé du contrôle de maths L3 : convergence monotone et lemme de Fatou

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours, le lemme de Fatou	4 points
Exercice 2 : Deux limites par convergence monotone	4 points
Exercice 3 : Intégration terme à terme et somme des inverses des carrés	6 points
Exercice 4 : Problème, masse perdue et fonctions presque partout finies	6 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours, le lemme de Fatou (4 points)

- a. **Théorème de convergence monotone (Beppo Levi).** Soit (f_n) une suite croissante de fonctions mesurables de X dans $[0, +\infty]$, et $f = \lim_n f_n = \sup_n f_n$. Alors f est mesurable et $\int_X f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \, d\mu$, l'égalité ayant lieu dans $[0, +\infty]$.
- b. D'abord, chaque $g_n = \inf_{k \geq n} f_k$ est mesurable, comme borne inférieure d'une famille dénombrable de fonctions mesurables à valeurs dans $[0, +\infty]$. Ensuite, la suite (g_n) est croissante : quand n augmente, la borne inférieure porte sur un ensemble d'indices plus petit. Sa limite vaut $\sup_n \inf_{k \geq n} f_k = \liminf_n f_n$.

Par ailleurs, pour tout $k \geq n$, on a $g_n \leq f_k$, donc $\int g_n \leq \int f_k$ par croissance de l'intégrale des fonctions positives. En passant à la borne inférieure sur $k \geq n$, on obtient

$$\int g_n \leq \inf_{k \geq n} \int f_k.$$

Enfin, le théorème de Beppo Levi s'applique à la suite croissante positive (g_n) :

$$\int_X \liminf_n f_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X g_n \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k \geq n} \int_X f_k \, d\mu = \liminf_n \int_X f_n \, d\mu.$$

C'est le lemme de Fatou. La dernière limite existe dans $[0, +\infty]$ car la suite des bornes inférieures est croissante.

Barème : a) 1 point (hypothèses de croissance et de positivité exigées) ; b) 3 points : 0,5 pour la mesurabilité de g_n , 0,5 pour sa croissance et sa limite, 1 point pour l'inégalité

$\int g_n \leq \inf_{k \geq n} \int f_k$, 1 point pour l'application de Beppo Levi et la conclusion.

Exercice 2 : Deux limites par convergence monotone (4 points)

a. Fixons $x \geq 0$ et posons $\varphi(u) = u \ln(1 + \frac{x}{u})$ pour $u > 0$. Avec $s = \frac{x}{u} \geq 0$, on calcule

$$\varphi'(u) = \ln(1 + \frac{x}{u}) - \frac{x/u}{1 + x/u} = \ln(1 + s) - \frac{s}{1 + s}.$$

La fonction $\psi(s) = \ln(1 + s) - \frac{s}{1 + s}$ vérifie $\psi(0) = 0$ et

$$\psi'(s) = \frac{1}{1 + s} - \frac{1}{(1 + s)^2} = \frac{s}{(1 + s)^2} \geq 0. \text{ Donc } \psi \geq 0 \text{ sur } [0, +\infty[, \text{ et } \varphi \text{ est}$$

croissante.

Ainsi $(1 + \frac{x}{n})^n = e^{\varphi(n)}$ croît avec n . De plus, $1_{[0, n]}(x)$ croît avec n , et tous ces facteurs sont positifs : la suite (f_n) est une suite croissante de fonctions mesurables positives. Pour x fixé et $n \geq x$, on a $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n e^{-2x}$, qui tend vers $e^x e^{-2x} = e^{-x}$. Par le théorème de Beppo Levi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1.$$

La limite vaut 1.

b. Pour $t \geq 0$, on a $0 \leq 1 - e^{-t} \leq t$ et $1 - e^{-t} \leq 1$. Avec $t = nx^2$, on obtient $0 \leq h_n(x) \leq \min\left(n, \frac{1}{x^2}\right)$. Or

$$\int_0^{+\infty} \min\left(n, \frac{1}{x^2}\right) dx = \int_0^{1/\sqrt{n}} n dx + \int_{1/\sqrt{n}}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \sqrt{n} + \sqrt{n} = 2\sqrt{n}.$$

Par croissance de l'intégrale, $J_n \leq 2\sqrt{n}$: J_n **est fini**.

Ensuite, pour $x > 0$ fixé, e^{-nx^2} décroît avec n , donc $(h_n(x))$ est croissante, de limite $\frac{1}{x^2}$. Les h_n sont continues, donc mesurables, et positives. Le théorème de Beppo Levi donne

$$\lim J_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2}. \text{ Cette intégrale vaut } +\infty, \text{ car déjà } \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{\varepsilon} - 1 \text{ tend vers } +\infty.$$

Donc $J_n \rightarrow +\infty$.

Barème : a) 2 points : 1 point pour la croissance de φ , 0,5 pour la monotonie de (f_n) et sa limite simple, 0,5 pour la conclusion ; b) 2 points : 0,5 pour l'encadrement, 0,5 pour la finitude, 1 point pour la monotonie et la limite infinie.

Erreur fréquente : oublier l'indicatrice $1_{[0, n]}$ dans l'étude de la monotonie ; ici elle croît aussi, donc le produit reste croissant.

Exercice 3 : Intégration terme à terme et somme des inverses des carrés (6 points)

a. Pour $x > 0$, on a $0 < e^{-x} < 1$. La série géométrique donne alors

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x e^{-x}}{1 - e^{-x}} = x e^{-x} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k x} = \sum_{n=1}^{+\infty} x e^{-n x}.$$

L'égalité est établie pour tout $x > 0$.

b. La fonction $x \rightarrow x e^{-n x}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$. Son intégrale de Lebesgue est donc la limite des intégrales sur $[0, A]$ quand $A \rightarrow +\infty$ (Beppo Levi appliqué aux fonctions $x e^{-n x} 1_{[0, A]}$). Par intégration par parties sur le segment,

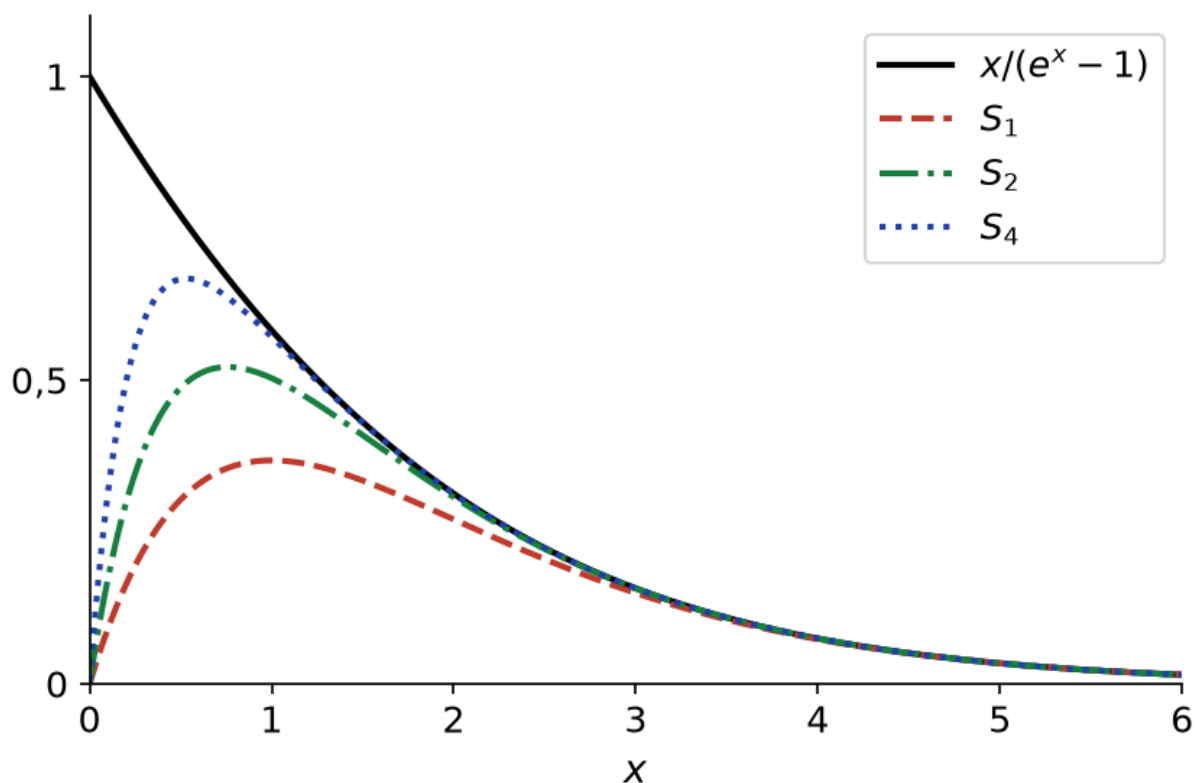
$$\int_0^A x e^{-n x} dx = \left[-\frac{x e^{-n x}}{n} \right]_0^A + \frac{1}{n} \int_0^A e^{-n x} dx = -\frac{A e^{-n A}}{n} + \frac{1 - e^{-n A}}{n^2}.$$

Quand $A \rightarrow +\infty$, on obtient $\int_0^{+\infty} x e^{-n x} dx = \frac{1}{n^2}$.

c. Les fonctions $x \rightarrow x e^{-n x}$ sont mesurables (continues) et positives sur $]0, +\infty[$. Le corollaire du théorème de Beppo Levi pour les séries de fonctions positives s'applique donc : les sommes partielles forment une suite croissante. Ainsi, puisque $\{0\}$ est négligeable,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x e^{-n x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Cette intégrale vaut $\frac{\pi^2}{6}$. Aucune domination n'est nécessaire : seule la positivité des termes compte.



d. Pour $x \in]0, 1[$, on a $\frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n$ et $-\ln x > 0$. Donc

$\frac{-\ln x}{1-x} = \sum_{n \geq 0} (-\ln x) x^n$, série de fonctions continues positives sur $]0, 1[$. Pour

$0 < \varepsilon < 1$, une intégration par parties donne

$$\int_{\varepsilon}^1 (-\ln x) x^n dx = \left[-\frac{x^{n+1} \ln x}{n+1} \right]_{\varepsilon}^1 + \int_{\varepsilon}^1 \frac{x^n}{n+1} dx = \frac{\varepsilon^{n+1} \ln \varepsilon}{n+1} + \frac{1 - \varepsilon^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

Comme $\varepsilon^{n+1} \ln \varepsilon \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$, et par convergence monotone en ε , on a

$\int_0^1 (-\ln x) x^n dx = \frac{1}{(n+1)^2}$. Le corollaire de Beppo Levi permet alors d'intégrer terme à terme :

$$\int_0^1 \frac{-\ln x}{1-x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}.$$

Cette intégrale vaut aussi $\frac{\pi^2}{6}$.

Barème : a) 1 point ; b) 1 point : 0,5 pour l'intégration par parties, 0,5 pour le passage à la limite justifié ; c) 2 points : 1 point pour les hypothèses (mesurabilité, positivité), 1 point pour le résultat ; d) 2 points : 0,5 pour le développement positif, 1 point pour le calcul de l'intégrale, 0,5 pour la conclusion.

Exercice 4 : Problème, masse perdue et fonctions presque partout finies (6 points)

- a. Pour $x \in]0, 1]$, on a $u_n(x) = 0$ dès que $n > \frac{1}{x}$, et $u_n(0) = 0$ pour tout n . Donc (u_n) **converge simplement vers 0 sur** $[0, 1]$, alors que $\int u_n = n \times \frac{1}{n} = 1$. De même, pour x réel fixé, $v_n(x) = 0$ dès que $n > x$, donc $v_n \rightarrow 0$ **simplement**, alors que $\int v_n = 1$. Dans les deux cas,

$$\int \liminf_n u_n = 0 < 1 = \liminf_n \int u_n,$$

et de même pour (v_n) : **l'inégalité de Fatou est stricte**. La masse de u_n se concentre en un pic de plus en plus haut près de 0, tandis que celle de v_n s'échappe vers l'infini.

- b. Soit N un ensemble négligeable hors duquel $f_n \rightarrow f$. Sur N^c , on a $f = \liminf_n f_n$. Comme f et $f 1_{N^c}$ sont égales presque partout, elles ont la même intégrale. Le lemme de Fatou appliqué aux fonctions positives $f_n 1_{N^c}$ donne

$$\int_X f \, d\mu = \int_X \liminf_n (f_n 1_{N^c}) \, d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n 1_{N^c} \, d\mu \leq C.$$

Donc $\int f \leq C$. Posons ensuite $E = \{f = +\infty\}$, mesurable. Pour tout entier k , on a $f \geq k 1_E$, donc $k \mu(E) \leq C$. Ainsi $\mu(E) \leq \frac{C}{k}$ pour tout k , d'où $\mu(E) = 0$: **f est finie presque partout.**

- c. La fonction $S = \sum_n 1_{A_n}$, à valeurs dans $[0, +\infty]$, compte le nombre d'indices n tels que $x \in A_n$. C'est une série de fonctions mesurables positives. Par le corollaire de Beppo Levi,

$\int_X S \, d\mu = \sum_n \mu(A_n) < +\infty$. Le raisonnement de b) montre alors que $\mu(\{S = +\infty\}) = 0$. **Presque tout point appartient donc à un nombre fini des A_n :**
 $\mu\left(\limsup_n A_n\right) = 0$.

d. Soit $r \in [0, 1]$. Par additivité et calcul de primitives,

$$\int_0^1 |x - r|^{-1/2} \, dx = \int_0^r (r - x)^{-1/2} \, dx + \int_r^1 (x - r)^{-1/2} \, dx = 2\sqrt{r} + 2\sqrt{1 - r}.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $(\sqrt{r} + \sqrt{1 - r})^2 \leq 2(r + 1 - r) = 2$. Donc **cette intégrale est majorée par $2\sqrt{2}$** .

Posons $F(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 \sqrt{|x - r_n|}}$, à valeurs dans $[0, +\infty]$, avec la convention

$F(r_n) = +\infty$. C'est une série de fonctions mesurables positives. Le corollaire de Beppo Levi donne

$$\int_0^1 F \, d\lambda = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{|x - r_n|}} \leq 2\sqrt{2} \times \frac{\pi^2}{6} < +\infty.$$

D'après b), F est finie λ -presque partout. **La série converge donc pour presque tout $x \in [0, 1]$** , alors que chacun de ses termes explose en un point d'un ensemble dense.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour chaque limite simple avec l'intégrale, 0,5 pour la comparaison et l'interprétation ; b) 1,5 point : 1 point pour le lemme de Fatou appliqué hors d'un négligeable, 0,5 pour la finitude presque partout ; c) 1,5 point : 1 point pour l'intégrale de S , 0,5 pour la conclusion ; d) 1,5 point : 0,5 pour le calcul et la majoration, 1 point pour l'intégration terme à terme et la conclusion.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : convergence monotone et lemme de

Fatou

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Intégrale de Lebesgue](#) » en L3 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [intégrale de lebesgue](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L3 sur ce thème

- [Contrôle de maths L3 : convergence dominée et intégrales à paramètre](#)
- [Contrôle de maths L3 : partiel final : intégration et probabilités](#)