

Corrigé du contrôle de maths L3 : convergence dominée et intégrales à paramètre

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours, convergence dominée et continuité	4 points
Exercice 2 : Trois limites d'intégrales	3 points
Exercice 3 : La fonction Gamma	4 points
Exercice 4 : Une intégrale à paramètre calculée par équation différentielle	5 points
Exercice 5 : Problème, sinus cardinal et intégrale de Lebesgue	4 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours, convergence dominée et continuité (4 points)

a. **Théorème de convergence dominée.** Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) telle que : (f_n) converge μ -presque partout vers une fonction f ; il existe g intégrable, positive, avec $|f_n| \leq g$ presque partout pour tout n . Alors f est intégrable, $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$ et $\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu$.

b. **Dérivation sous le signe intégrale.** Soit $f : I \times X \rightarrow \mathbb{R}$ telle que : pour tout $x \in I$, $t \rightarrow f(x, t)$ est intégrable ; pour presque tout t , $x \rightarrow f(x, t)$ est dérivable sur I ; il

existe g intégrable avec $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq g(t)$ pour tout $x \in I$ et presque tout t . Alors

F est dérivable sur I et $F'(x) = \int_X \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) d\mu(t)$. Si de plus $x \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue, F est de classe C^1 .

- c. Pour tout $x \in I$, la fonction $t \rightarrow f(x, t)$ est mesurable et dominée par g intégrable. Elle est donc intégrable : **F est définie sur I .**

Soit ensuite $x_0 \in I$ et (x_n) une suite de I qui converge vers x_0 . On pose $h_n(t) = f(x_n, t)$. Vérifions les hypothèses du théorème de convergence dominée :

- chaque h_n est mesurable ;
- pour presque tout t , la continuité de $x \rightarrow f(x, t)$ donne $h_n(t) \rightarrow f(x_0, t)$;
- pour tout n et presque tout t , $|h_n(t)| \leq g(t)$, avec g intégrable et indépendante de n .

Le théorème donne $F(x_n) = \int h_n \rightarrow \int f(x_0, t) d\mu(t) = F(x_0)$. Par la caractérisation séquentielle de la continuité, **F est continue en x_0 , donc sur I .**

Barème : a) 1 point (0,5 si la domination indépendante de n manque) ; b) 1 point ; c) 2 points : 0,5 pour la définition de F , 1 point pour les trois hypothèses vérifiées, 0,5 pour l'argument séquentiel.

Exercice 2 : Trois limites d'intégrales (3 points)

- a. Posons $f_n(x) = \frac{n \sin(x/n)}{x(1+x^2)}$ sur $]0, +\infty[$. Ces fonctions sont continues, donc mesurables. Pour $x > 0$ fixé, $n \sin(x/n) \rightarrow x$, donc $f_n(x) \rightarrow \frac{1}{1+x^2}$. De plus, l'inégalité $|\sin u| \leq |u|$ donne $|f_n(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$, fonction intégrable sur $]0, +\infty[$ et indépendante de n . Par convergence dominée, la limite vaut $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$. **Elle est égale à $\frac{\pi}{2}$.**

- b. Posons $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n 1_{[0, n]}(x)$ sur $[0, +\infty[$. Pour $0 \leq x < n$, on a

$\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \leq -\frac{x}{n}$ (concavité du logarithme), donc $0 \leq f_n(x) \leq e^{-x}$. L'inégalité reste vraie pour $x \geq n$, où $f_n(x) = 0$. La fonction e^{-x} est intégrable sur $[0, +\infty[$. Pour x fixé, dès que $n > x$, $f_n(x) = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right) \rightarrow e^{-x}$. Par convergence dominée, la

limite vaut $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$. On peut contrôler : l'intégrale vaut exactement $\frac{n}{n+1}$.

- c. Posons $f_n(x) = \frac{1+nx}{(1+x)^n}$ sur $[0, 1]$. L'inégalité de Bernoulli $(1+x)^n \geq 1+nx$ donne $0 \leq f_n \leq 1$. La constante 1 est intégrable sur $[0, 1]$, qui est de mesure finie. Pour $x \in]0, 1]$ et $n \geq 2$, la formule du binôme donne $(1+x)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} x^2$, d'où $f_n(x) \leq \frac{2(1+nx)}{n(n-1)x^2} \rightarrow 0$. Ainsi $f_n \rightarrow 0$ presque partout (hors de $\{0\}$, négligeable). Par convergence dominée, **la limite vaut 0**.

Barème : 1 point par limite : 0,5 pour la domination explicite, 0,25 pour la limite simple, 0,25 pour la valeur.

Exercice 3 : La fonction Gamma (4 points)

- a. La fonction $t \rightarrow t^{x-1} e^{-t}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$. Son intégrabilité se ramène donc à l'étude en 0 et en l'infini. En 0, $t^{x-1} e^{-t} \sim t^{x-1}$, intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $1-x < 1$, c'est-à-dire $x > 0$ (critère de Riemann, comparaison des fonctions positives). En l'infini, $t^{x+1} e^{-t} \rightarrow 0$, donc $t^{x-1} e^{-t} \leq \frac{1}{t^2}$ pour t assez grand : c'est intégrable sur $[1, +\infty[$ pour tout x . **La fonction est intégrable si et seulement si $x > 0$** .
- b. Soit $x \in [a, b]$. Si $0 < t \leq 1$, alors $t^{x-1} \leq t^{a-1}$, car $x \geq a$ et $\ln t \leq 0$. Si $t \geq 1$, alors $t^{x-1} \leq t^{b-1}$. Dans tous les cas, $0 < t^{x-1} e^{-t} \leq \varphi(t) = (t^{a-1} + t^{b-1}) e^{-t}$, et φ est intégrable d'après a), car $a > 0$ et $b > 0$. De plus, pour tout $t > 0$, $x \rightarrow t^{x-1} e^{-t} = e^{(x-1)\ln t - t}$ est continue. Le théorème de continuité (exercice 1 c) donne la continuité de Γ sur $[a, b]$. Ceci vaut pour tout segment de $]0, +\infty[$, donc **Γ est continue sur $]0, +\infty[$** .
- c. Pour $t > 0$, $x \rightarrow t^{x-1} e^{-t}$ est de classe C^1 , de dérivée $\ln(t) t^{x-1} e^{-t}$. Sur $[a, b]$, on a la domination $|\ln t| t^{x-1} e^{-t} \leq |\ln t| \varphi(t)$. Cette fonction est intégrable. En effet, en 0,

$t^{\alpha/2} |\ln t| \rightarrow 0$, donc $|\ln t| t^{\alpha-1} \leq t^{\alpha/2-1}$ près de 0, et $\frac{\alpha}{2} > 0$. En l'infini, $|\ln t| t^{b-1} e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Le théorème de dérivation s'applique sur tout segment, donc Γ est C^1 sur $]0, +\infty[$, avec $\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t) t^{x-1} e^{-t} dt$.

d. Soit $x > 0$. Sur $[\varepsilon, A]$, une intégration par parties donne

$$\int_{\varepsilon}^A t^x e^{-t} dt = [-t^x e^{-t}]_{\varepsilon}^A + x \int_{\varepsilon}^A t^{x-1} e^{-t} dt. \text{ Le crochet tend vers 0 quand}$$

$$\varepsilon \rightarrow 0 \text{ et } A \rightarrow +\infty, \text{ donc } \Gamma(x+1) = x \Gamma(x). \text{ Comme } \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1,$$

une récurrence donne $\Gamma(n+1) = n!$. Enfin, $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$ et

$$\Gamma(x+1) \rightarrow \Gamma(1) = 1 \text{ quand } x \rightarrow 0^+, \text{ par continuité. Donc } \Gamma(x) \sim \frac{1}{x} \text{ en } 0^+.$$

Barème : a) 1 point (0,5 par borne) ; b) 1 point : 0,5 pour la domination, 0,5 pour la conclusion locale puis globale ; c) 1 point : 0,5 pour l'intégrabilité de la domination, 0,5 pour la formule ; d) 1 point : 0,5 pour la relation fonctionnelle, 0,25 pour $n!$, 0,25 pour l'équivalent.

Erreur fréquente : chercher une domination valable sur tout $]0, +\infty[$; elle n'existe pas, et il faut travailler sur un segment $[a, b]$.

Exercice 4 : Une intégrale à paramètre calculée par équation différentielle (5 points)

a. Posons $f(x, t) = e^{-t^2} \cos(xt)$. Pour tout x , $t \rightarrow f(x, t)$ est continue, donc mesurable. Pour tout t , $x \rightarrow f(x, t)$ est continue. Enfin, $|f(x, t)| \leq e^{-t^2}$, fonction intégrable sur $[0, +\infty[$ et indépendante de x . Le théorème de continuité donne alors que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b. Pour tout t , $x \rightarrow f(x, t)$ est de classe C^1 , de dérivée $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -t e^{-t^2} \sin(xt)$. On a la domination $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq t e^{-t^2}$, indépendante de x . Cette fonction est intégrable

sur $[0, +\infty[$, d'intégrale $\left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$. Le théorème de dérivation sous le signe

intégrale s'applique donc sur $\mathbb{R}$: F est C^1 et $F'(x) = -\int_0^{+\infty} t e^{-t^2} \sin(xt) dt$.

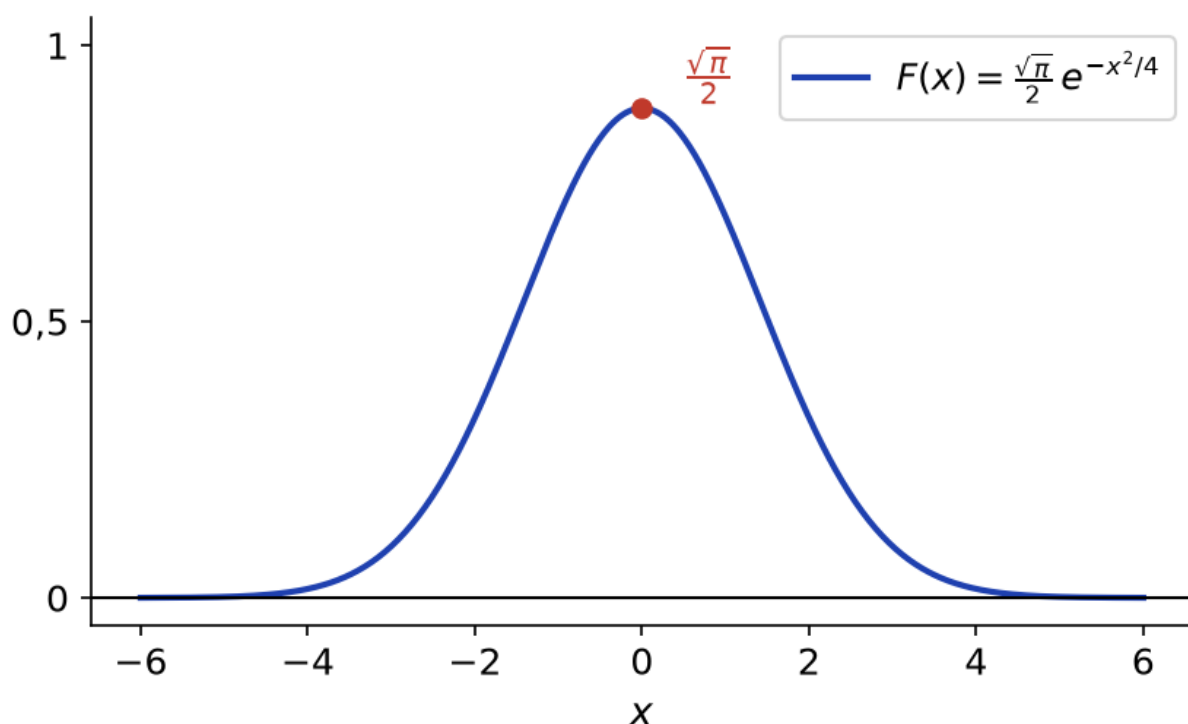
c. Sur $[0, A]$, on intègre par parties avec $u(t) = \sin(xt)$ et $v(t) = -\frac{1}{2}e^{-t^2}$:

$$\int_0^A t e^{-t^2} \sin(xt) dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2} \sin(xt)\right]_0^A + \frac{x}{2} \int_0^A e^{-t^2} \cos(xt) dt.$$

Le crochet vaut $-\frac{1}{2}e^{-A^2} \sin(xA)$, qui tend vers 0. Les deux intégrales convergent quand $A \rightarrow +\infty$, car les intégrandes sont intégrables. On obtient

$$\int_0^{+\infty} t e^{-t^2} \sin(xt) dt = \frac{x}{2} F(x), \text{ donc } F'(x) = -\frac{x}{2} F(x).$$

d. Posons $H(x) = F(x) e^{x^2/4}$. Alors $H'(x) = e^{x^2/4} \left(F'(x) + \frac{x}{2} F(x)\right) = 0$. Donc H est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$, égale à $H(0) = F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Ainsi $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2/4}$ pour tout réel x .



Barème : a) 1 point ; b) 1,5 point : 1 point pour la domination de la dérivée partielle, 0,5 pour la conclusion ; c) 1,5 point : 1 point pour l'intégration par parties, 0,5 pour le passage à la limite ; d) 1 point.

Exercice 5 : Problème, sinus cardinal et intégrale de Lebesgue (4 points)

a. Sur $]0, 1]$, on a $|\sin t| \leq t$, donc $|s(t)| \leq 1$. La fonction s est continue, donc mesurable, et bornée sur un ensemble de mesure finie. **Elle est intégrable sur $]0, 1]$.**

b. Soit $k \geq 1$. Pour $t \in [k\pi, (k+1)\pi]$, on a $\frac{1}{t} \geq \frac{1}{(k+1)\pi}$, et $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt = 2$. Donc

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |s(t)| dt \geq \frac{2}{(k+1)\pi}. \text{ En sommant pour } k \text{ de } 1 \text{ à } N,$$

$$\int_{]0, +\infty[} |s| d\lambda \geq \int_{\pi}^{(N+1)\pi} |s(t)| dt \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k+1}.$$

La série harmonique diverge, donc $\int |s| = +\infty$. **La fonction s n'est pas intégrable au sens de Lebesgue sur $]0, +\infty[$.**

c. Pour $A > 1$, une intégration par parties donne

$$\int_1^A \frac{\sin t}{t} dt = \left[-\frac{\cos t}{t} \right]_1^A - \int_1^A \frac{\cos t}{t^2} dt = \cos 1 - \frac{\cos A}{A} - \int_1^A \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

Or $\frac{\cos A}{A} \rightarrow 0$. De plus, $\left| \frac{\cos t}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$, intégrable sur $[1, +\infty[$, donc la dernière intégrale a une limite finie. Avec a), $\int_0^A s(t) dt$ **admet une limite finie quand $A \rightarrow +\infty$** : l'intégrale impropre converge, sans convergence absolue.

d. Pour $x > 0$, $|e^{-xt} s(t)| \leq e^{-xt}$, intégrable sur $]0, +\infty[$: $G(x)$ est définie. Fixons

$a > 0$ et travaillons sur $]a, +\infty[$. La dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x}(e^{-x t} s(t)) = -e^{-x t} \sin t$ est continue en x , et dominée par $e^{-a t}$, intégrable et indépendante de x . Donc G est C^1 sur $]0, +\infty[$, avec

$$G'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-x t} \sin t \, dt = -\operatorname{Im} \int_0^{+\infty} e^{(-x+i)t} \, dt = -\operatorname{Im} \frac{1}{x-i} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Ensuite, soit (x_n) une suite tendant vers $+\infty$, avec $x_n \geq 1$. Pour $t > 0$, $e^{-x_n t} s(t) \rightarrow 0$, et $|e^{-x_n t} s(t)| \leq e^{-t}$, intégrable. Par convergence dominée, $G(x_n) \rightarrow 0$: G tend vers 0 en $+\infty$. Comme $G' = -\arctan'$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$, il existe une constante c telle que $G(x) = c - \arctan x$. La limite en $+\infty$ donne $c = \frac{\pi}{2}$, d'où $G(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$.

Remarque : on ne peut pas faire tendre x vers 0 par convergence dominée, car une domination devrait majorer $|s|$, non intégrable d'après b). Un argument plus fin (admis ici) montre que l'intégrale impropre de c) vaut $\frac{\pi}{2}$.

Barème : a) 0,5 point ; b) 1 point : 0,5 pour la minoration, 0,5 pour la divergence ; c) 1 point : 0,5 pour l'intégration par parties, 0,5 pour la convergence ; d) 1,5 point : 0,5 pour la régularité avec domination sur $]a, +\infty[$, 0,5 pour G' , 0,5 pour la limite et l'expression.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : convergence dominée et intégrales à paramètre

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours [« Intégrale de Lebesgue » en L3](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [intégrale de lebesgue](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L3 sur ce thème

- [Contrôle de maths L3 : convergence monotone et lemme de Fatou](#)
- [Contrôle de maths L3 : partiel final : intégration et probabilités](#)