

Corrigé du contrôle de maths L3 : complétude, espaces de Banach et point fixe

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours, complétude de $C([a,b])$	4 points
Exercice 2 : Sous-espaces fermés ou non	4 points
Exercice 3 : Séries dans un espace de Banach	4 points
Exercice 4 : Problème, une équation intégrale de Fredholm	8 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours, complétude de $C([a,b])$ (4 points)

a. Soit (f_n) une suite de Cauchy de $(C([a,b]), N_\infty)$.

Limite simple. Pour tout $x \in [a,b]$, $|f_p(x) - f_q(x)| \leq N_\infty(f_p - f_q)$, donc $(f_n(x))$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, qui est complet : elle converge vers un réel noté $f(x)$.

Convergence uniforme. Soit $\varepsilon > 0$ et N tel que $N_\infty(f_p - f_q) \leq \varepsilon$ pour $p, q \geq N$. Pour tout x et tout $p \geq N$, $|f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$; en faisant tendre q vers $+\infty$, $|f_p(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Donc $\sup_x |f_p(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ pour $p \geq N$: (f_n) converge uniformément vers f .

Continuité de la limite. Soit $x_0 \in [a, b]$, $\varepsilon > 0$ et p tel que $\sup |f_p - f| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Par continuité de f_p , il existe $\eta > 0$ tel que $|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f_p(x) - f_p(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Alors

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_p(x)| + |f_p(x) - f_p(x_0)| + |f_p(x_0) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Ainsi $f \in C([a, b])$ et $N_\infty(f_p - f) \rightarrow 0$. **Toute suite de Cauchy converge :**
 $(C([a, b]), N_\infty)$ **est un espace de Banach.**

- b. Soit F un fermé de X complet et (x_n) une suite de Cauchy de F . C'est une suite de Cauchy de X , donc elle converge vers un $x \in X$; comme F est fermé, $x \in F$ (caractérisation séquentielle). **F est complet.**

Soit A une partie complète de X et $x \in \overline{A}$: il existe une suite (a_n) de A qui converge vers x . Elle est convergente, donc de Cauchy; comme A est complète, elle converge vers un $a \in A$. Par unicité de la limite, $x = a \in A$. **A est fermée.**

Barème : a) 2,5 points : 0,5 pour la limite simple, 1 point pour le passage à la limite uniforme, 1 point pour la continuité de la limite ; b) 1,5 point : 0,75 par implication.

Exercice 2 : Sous-espaces fermés ou non (4 points)

- a. La forme linéaire $\delta_0 : f \rightarrow f(0)$ vérifie $|\delta_0(f)| \leq N_\infty(f)$: elle est continue. Donc $H = \delta_0^{-1}(\{0\})$ est un fermé, et c'est un sous-espace comme noyau d'une forme linéaire. **H est un sous-espace fermé du Banach E , donc il est complet** (exercice 1 b).

- b. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$, qui est dans $\mathcal{P}$. Pour $x \in [0, 1]$,
- $$|e^x - S_n(x)| = \sum_{k > n} \frac{x^k}{k!} \leq \sum_{k > n} \frac{1}{k!},$$
- reste d'une série convergente, qui tend vers 0. Donc $S_n \rightarrow \exp$ pour N_∞ , et $\exp \in \overline{\mathcal{P}}$. Mais $\exp$ n'est pas polynomiale sur $[0, 1]$: si $\exp = P$ de degré d sur $[0, 1]$, la dérivée d'ordre $d + 1$ donnerait $\exp = 0$ sur $[0, 1]$, ce qui est faux. **$\mathcal{P}$ n'est pas fermé dans E ; d'après l'exercice 1 b), $(\mathcal{P}, N_\infty)$ n'est pas complet.**

- c. Pour $m \geq n \geq 2$, les fonctions f_n et f_m sont égales en dehors de $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right]$ et prennent leurs valeurs dans $[0, 1]$, donc $N_1(f_n - f_m) \leq \frac{1}{n}$. **La suite est de Cauchy pour**

N_1 .

Supposons que $N_1(f_n - f) \rightarrow 0$ avec $f \in E$. D'une part

$\int_0^{1/2} |f| = \int_0^{1/2} |f - f_n| \leq N_1(f - f_n) \rightarrow 0$, donc $\int_0^{1/2} |f| = 0$ et, f étant continue, $f = 0$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. D'autre part, soit $c \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$: pour n assez grand, $f_n = 1$ sur $[c, 1]$, donc $\int_c^1 |f - 1| \leq N_1(f - f_n) \rightarrow 0$ et $f = 1$ sur $[c, 1]$. Ainsi $f = 1$ sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$: f n'est pas continue en $\frac{1}{2}$, contradiction. (f_n) **ne converge pas** : (E, N_1) **n'est pas complet**.

Barème : a) 1 point : 0,5 pour la fermeture, 0,5 pour la complétude ; b) 1,5 point : 0,5 pour la convergence uniforme, 0,5 pour exp non polynomiale, 0,5 pour la conséquence ; c) 1,5 point : 0,5 pour le critère de Cauchy, 1 point pour la non-convergence.

Erreur fréquente : dire que la « limite » de (f_n) est la fonction indicatrice de $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et s'arrêter là : il faut prouver qu'aucune fonction continue n'est limite pour N_1 .

Exercice 3 : Séries dans un espace de Banach (4 points)

a. Notons $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Pour $p > n$, l'inégalité triangulaire donne

$|S_p - S_n| \leq \sum_{k=n+1}^p |u_k| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k|$, reste d'une série réelle convergente, qui tend vers 0. La suite (S_n) est de Cauchy dans E complet, donc elle converge. De plus

$|S_n| \leq \sum_{k=0}^n |u_k| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$, et la norme est continue : par passage à la limite, $\sum u_n$ converge et $\left\| \sum u_n \right\| \leq \sum |u_n|$.

b. Posons $q = \|A\| < 1$. L'espace $M_d(\mathbb{R})$ est de dimension finie, donc complet. Comme la norme est subordonnée, $\|A^k\| \leq q^k$, terme d'une série géométrique convergente : d'après a),

$$S = \sum_{k \geq 0} A^k \text{ converge et } \|S\| \leq \sum q^k = \frac{1}{1-q}. \text{ Par télescopage,}$$

$$(I_d - A) \sum_{k=0}^N A^k = \sum_{k=0}^N A^k (I_d - A) = I_d - A^{N+1}, \text{ avec}$$

$$\|A^{N+1}\| \leq q^{N+1} \rightarrow 0. \text{ Le produit matriciel étant continu, on obtient}$$

$$(I_d - A)S = S(I_d - A) = I_d. \quad I_d - A \text{ est inversible,}$$

$$(I_d - A)^{-1} = \sum_{k \geq 0} A^k \text{ et } \|(I_d - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}.$$

- c. Soit (u_n) une suite de Cauchy de E . On construit par récurrence une extraction φ telle que $|u_p - u_q| \leq 2^{-k}$ pour $p, q \geq \varphi(k)$. Alors $|u_{\varphi(k+1)} - u_{\varphi(k)}| \leq 2^{-k}$: la série $\sum (u_{\varphi(k+1)} - u_{\varphi(k)})$ est absolument convergente, donc convergente par hypothèse.
- Par télescopage, $u_{\varphi(K)} = u_{\varphi(0)} + \sum_{k=0}^{K-1} (u_{\varphi(k+1)} - u_{\varphi(k)})$ converge vers un $\ell \in E$.
- Enfin $|u_n - \ell| \leq |u_n - u_{\varphi(k)}| + |u_{\varphi(k)} - \ell|$: une suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence converge vers elle. **E est complet.**

Barème : a) 1,5 point : 1 point pour le critère de Cauchy, 0,5 pour l'inégalité ; b) 1,5 point : 0,5 pour la convergence, 0,5 pour le télescopage, 0,5 pour la majoration ; c) 1 point : 0,5 pour l'extraction, 0,5 pour la conclusion.

Exercice 4 : Problème, une équation intégrale de Fredholm (8 points)

- a. Pour x fixé, $t \rightarrow K(x, t)f(t)$ est continue sur $[0, 1]$, donc l'intégrale existe. La fonction K est continue sur le compact $[0, 1]^2$, donc uniformément continue (théorème de Heine) : pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $|x - y| < \eta$ entraîne $|K(x, t) - K(y, t)| \leq \varepsilon$ pour tout $t \in [0, 1]$. Alors

$$\left| \int_0^1 (K(x, t) - K(y, t))f(t) dt \right| \leq \varepsilon N_\infty(f).$$

La fonction $x \rightarrow \int_0^1 K(x, t) f(t) dt$ est donc (uniformément) continue, et g l'est aussi :
 $T(f) \in E$.

b. Pour tout x ,

$$|T(f)(x) - T(h)(x)| = |\lambda| \left| \int_0^1 K(x, t) (f(t) - h(t)) dt \right| \leq |\lambda| \int_0^1 M N_\infty(f - h) dt.$$

En passant au sup sur x : $N_\infty(T(f) - T(h)) \leq |\lambda| M N_\infty(f - h)$; T est k -lipschitzienne.

c. Par récurrence, $N_\infty(f_{j+1} - f_j) \leq k^j N_\infty(f_1 - f_0)$. Pour $p > n$:

$$N_\infty(f_p - f_n) \leq \sum_{j=n}^{p-1} k^j N_\infty(f_1 - f_0) \leq \frac{k^n}{1-k} N_\infty(f_1 - f_0).$$

Comme $k^n \rightarrow 0$, (f_n) est de Cauchy dans E , complet (exercice 1) : elle converge vers un $f^* \in E$. L'application T étant lipschitzienne donc continue, le passage à la limite dans

$f_{n+1} = T(f_n)$ donne $T(f^*) = f^*$. Si h est un autre point fixe,

$$N_\infty(f^* - h) = N_\infty(T(f^*) - T(h)) \leq k N_\infty(f^* - h), \text{ avec } k < 1, \text{ donc } h = f^*.$$

Enfin, en faisant tendre p vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente :

$$N_\infty(f_n - f^*) \leq \frac{k^n}{1-k} N_\infty(f_1 - f_0), \text{ et l'équation admet une unique solution.}$$

d. $E^+ = \bigcap_{x \in [0,1]} \delta_x^{-1}([0, +\infty[)$, où $\delta_x : f \rightarrow f(x)$ est continue ($|f(x)| \leq N_\infty(f)$) :

c'est une intersection de fermés, donc un fermé. Si $f \geq 0$, alors $K(x, t) f(t) \geq 0$, donc

$T(f) \geq g \geq 0$: $T(E^+) \subset E^+$. En partant de $f_0 = 0 \in E^+$, toute la suite (f_n) reste dans E^+ , et sa limite f^* y est aussi puisque E^+ est fermé. **Donc** $f^* \geq 0$. (On peut aussi appliquer le théorème du point fixe au fermé E^+ , complet et stable.)

e. Ici $M = \max_{[0,1]^2} xt = 1$, donc $k = \frac{1}{2} < 1$ et c) s'applique. Pour $f(x) = ax$:

$$T(f)(x) = x + \frac{1}{2} \int_0^1 xt \cdot at dt = x + \frac{a}{2} \times \frac{x}{3} = \left(1 + \frac{a}{6}\right)x.$$

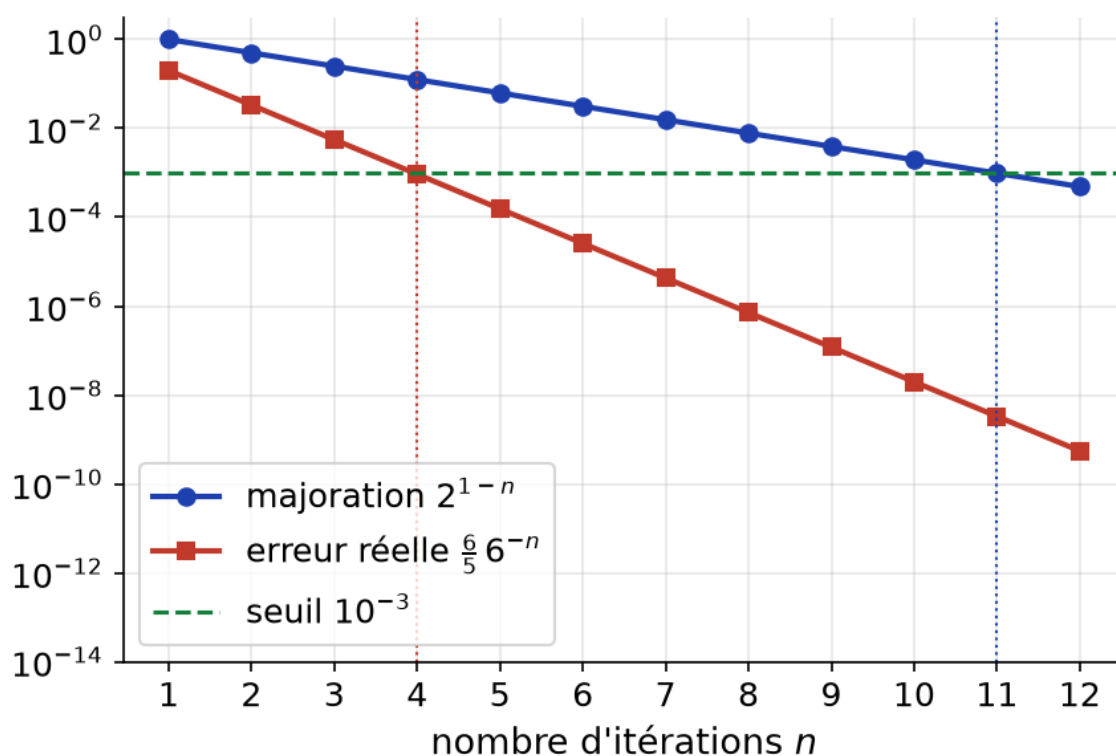
Donc $T(f) = f$ si et seulement si $a = 1 + \frac{a}{6}$, soit $a = \frac{6}{5}$. Par unicité du point fixe,

$$f^*(x) = \frac{6x}{5}. \text{ Vérification : } \int_0^1 t \cdot \frac{6t}{5} dt = \frac{2}{5} \text{ et } x + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5}x = \frac{6}{5}x.$$

f. Le calcul de e) montre que T envoie $x \rightarrow ax$ sur $x \rightarrow \left(1 + \frac{a}{6}\right)x$. Comme $f_0 = 0$ (soit $a_0 = 0$), on obtient par récurrence $f_n(x) = a_n x$ avec $a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{6}$. En retranchant $\frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{6} \times \frac{6}{5}$, $a_{n+1} - \frac{6}{5} = \frac{1}{6} \left(a_n - \frac{6}{5}\right)$, d'où $a_n = \frac{6}{5}(1 - 6^{-n})$ et

$$N_\infty(f_n - f^*) = \sup_{x \in [0,1]} \left| a_n - \frac{6}{5} \right| x = \frac{6}{5} \times 6^{-n}.$$

La majoration de c), avec $f_1 = g$ et $N_\infty(f_1 - f_0) = 1$, donne $\frac{(1/2)^n}{1/2} = 2^{1-n}$. Elle garantit 10^{-3} dès que $2^{n-1} \geq 1000$, soit $n - 1 \geq 10$ (car $2^9 = 512$ et $2^{10} = 1024$) : **11 itérations**. L'erreur réelle est au plus 10^{-3} dès que $6^n \geq 1200$, soit $n \geq 4$ (car $6^3 = 216$ et $6^4 = 1296$) : **4 itérations suffisent réellement**. La constante $k = \frac{1}{2}$ est pessimiste : l'itération converge ici au rythme $\frac{1}{6}$.



Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour l'existence de l'intégrale, 1 point pour la continuité via Heine ; b) 1 point ; c) 2 points : 0,75 pour le critère de Cauchy, 0,5 pour le point fixe, 0,25 pour l'unicité, 0,5 pour l'estimation ; d) 1 point : 0,5 pour le fermé, 0,5 pour la stabilité et la conclusion ; e) 1,5 point : 0,5 pour k , 1 point pour f^* ; f) 1 point : 0,5 pour l'erreur exacte, 0,5 pour les deux nombres d'itérations.

Après le corrigé du contrôle : complétude, espaces de Banach et point fixe

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Complétude et point fixe](#) » en L3 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [complétude et point fixe](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L3 sur ce thème

- [Contrôle de maths L3 : partiel de topologie des espaces normés](#)