

Corrigé du contrôle de maths L3 : compacité, théorème de Heine et connexité

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours, compacts et continuité	4 points
Exercice 2 : Distance à un compact	4 points
Exercice 3 : Le théorème de Heine en action	4 points
Exercice 4 : Connexité et groupes de matrices	4 points
Exercice 5 : Problème, le sinus du topologue	4 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours, compacts et continuité (4 points)

a. Soit (y_n) une suite de $f(K)$: pour tout n , il existe $x_n \in K$ tel que $y_n = f(x_n)$. Comme K est compact, il existe une extraction φ et $x \in K$ tels que $x_{\varphi(n)} \rightarrow x$. Par continuité de f en x (caractérisation séquentielle), $y_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)}) \rightarrow f(x)$, et $f(x) \in f(K)$. **Toute suite de $f(K)$ a une sous-suite convergente dans $f(K)$: $f(K)$ est compact.**

b. D'après a), $g(K)$ est un compact non vide de $\mathbb{R}$. Il est borné : sinon on trouverait $y_n \in g(K)$ avec $|y_n| \geq n$, et aucune sous-suite de (y_n) ne convergerait. Soit $M = \sup g(K)$: il existe $y_n \in g(K)$ avec $M - \frac{1}{n} < y_n \leq M$. Une sous-suite

converge vers un élément de $g(K)$, qui ne peut être que M , limite de toute la suite. Donc $M \in g(K)$, et de même pour la borne inférieure. **g est bornée et il existe $a, b \in K$ avec $g(a) = \min_K g$ et $g(b) = \max_K g$.**

- c. **Théorème de Heine.** Si K est un espace métrique compact, toute application continue $f : K \rightarrow F$ est uniformément continue : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tous $x, y \in K$, $d(x, y) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

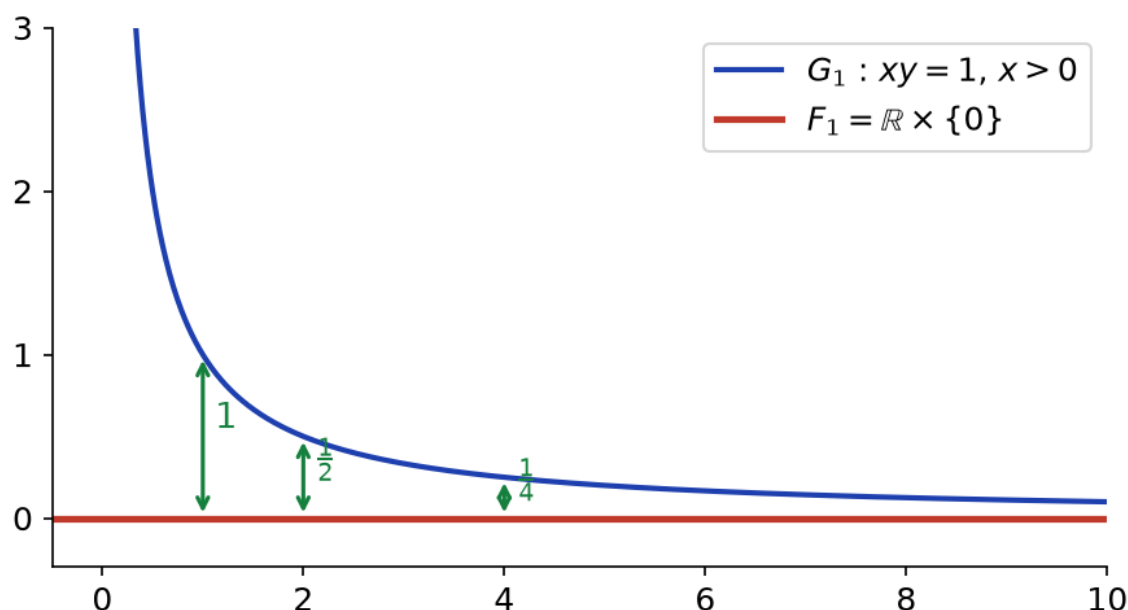
Preuve. Par l'absurde, supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $n \geq 1$, on trouve $x_n, y_n \in K$ avec $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ et $\delta(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$. Par compacité, il existe une extraction φ avec $x_{\varphi(n)} \rightarrow x \in K$. Comme $d(y_{\varphi(n)}, x) \leq d(y_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, x) \rightarrow 0$, on a aussi $y_{\varphi(n)} \rightarrow x$. Par continuité de f en x , $\delta(f(x_{\varphi(n)}), f(y_{\varphi(n)})) \leq \delta(f(x_{\varphi(n)}), f(x)) + \delta(f(x), f(y_{\varphi(n)})) \rightarrow 0$, ce qui contredit la minoration par ε . **Donc f est uniformément continue.**

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour les antécédents, 0,5 pour l'extraction, 0,5 pour la continuité ; b) 1 point : 0,5 pour le caractère borné, 0,5 pour les bornes atteintes ; c) 1,5 point : 0,5 pour l'énoncé, 1 point pour la preuve.

Exercice 2 : Distance à un compact (4 points)

- a. L'application $k \rightarrow d(x, k)$ est continue sur E (elle est 1-lipschitzienne par l'inégalité triangulaire). Sa restriction au compact non vide K atteint sa borne inférieure (exercice 1 b) : **il existe $k_0 \in K$ tel que $d(x, k_0) = \min_{k \in K} d(x, k) = d(x, K)$.**
- b. On a $d(K, F_0) = \inf_{k \in K} d(k, F_0)$. La fonction $h : k \rightarrow d(k, F_0)$ est continue (1-lipschitzienne) sur le compact non vide K , donc elle atteint son minimum en un point $k_1 \in K$. Comme F_0 est fermé, $d(k_1, F_0) = 0$ équivaudrait à $k_1 \in \overline{F_0} = F_0$, ce qui est exclu puisque $K \cap F_0 = \emptyset$. **Donc $d(K, F_0) = h(k_1) > 0$.**
- c. Prenons $F_1 = \mathbb{R} \times \{0\}$ et $G_1 = \left\{ (x, y) : xy = 1, x \geq 0 \right\}$, branche d'hyperbole. Ce sont des fermés, images réciproques de fermés de $\mathbb{R}$ par des fonctions continues ($(x, y) \rightarrow y$ pour F_1 ; $(x, y) \rightarrow xy$ et $(x, y) \rightarrow x$ pour G_1), et ils sont disjoints car $xy = 1$ impose

$y \neq 0$. Enfin $d\left((x, 0), \left(x, \frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{x} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$: $d(F_1, G_1) = 0$, ce qui montre que l'hypothèse de compacité est indispensable en b).



- d. Soit $a_0 \in F_0$ et $r = |x - a_0|$. L'ensemble $F' = F_0 \cap \overline{B}(x, r)$ est fermé, borné et non vide (il contient a_0) ; comme E est de dimension finie, il est compact. Pour $a \in F_0 \setminus F'$, $|x - a| > r \geq d(x, F')$, donc $d(x, F_0) = d(x, F')$. D'après a), cette distance est atteinte en un point de $F' \subset F_0$. **La distance de x à F_0 est atteinte.**

Barème : a) 1 point ; b) 1,5 point : 0,5 pour la continuité et le minimum, 1 point pour la stricte positivité ; c) 0,5 point ; d) 1 point : 0,5 pour la compacité de F' , 0,5 pour l'égalité des distances.

Erreur fréquente : en d), affirmer que F_0 est compact : un fermé non borné ne l'est pas, il faut d'abord se ramener à une partie bornée.

Exercice 3 : Le théorème de Heine en action (4 points)

- a. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A \geq 0$ tel que $|f(x) - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour $x \geq A$; alors, pour

$x, y \geq A$, $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Sur le segment $[0, A+1]$, qui est compact, f est continue donc uniformément continue par le théorème de Heine : il existe $\eta_1 > 0$ tel que $x, y \in [0, A+1]$ et $|x - y| < \eta_1$ entraînent $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Posons $\eta = \min(\eta_1, 1)$ et soit $x \leq y$ avec $y - x < \eta$. Si $y \leq A+1$, les deux points sont dans $[0, A+1]$; sinon $y > A+1$ et $x > y - 1 > A$, donc les deux points sont dans $[A, +\infty[$. Dans les deux cas $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. **f est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.**

b. Pour $n \geq 1$, posons $x_n = n$ et $y_n = n + \frac{1}{n}$. Alors $|y_n - x_n| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, mais $y_n^2 - x_n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} \geq 2$. Avec $\varepsilon = 2$, aucun η ne convient (on choisit n tel que $\frac{1}{n} < \eta$). **La fonction carré n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.**

c. Par le théorème de Heine, f est uniformément continue sur le compact $[0, 1]$: il existe $\eta > 0$ tel que $|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Soit N un entier tel que $\frac{1}{N} \leq \eta$. On définit $g(x) = f\left(\frac{k}{N}\right)$ pour $x \in \left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right[$ ($0 \leq k \leq N-1$) et $g(1) = f(1)$. La fonction g est en escalier et, pour x dans le k -ième intervalle, $\left|x - \frac{k}{N}\right| \leq \frac{1}{N} \leq \eta$, donc $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ **sur $[0, 1]$.**

Barème : a) 2 points : 0,5 pour le voisinage de $+\infty$, 0,5 pour Heine sur $[0, A+1]$, 1 point pour le recollement avec $\eta = \min(\eta_1, 1)$; b) 1 point ; c) 1 point.

Exercice 4 : Connexité et groupes de matrices (4 points)

a. Le segment $[0, 1]$ est connexe et f est continue, donc $f([0, 1])$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire un intervalle. Cet intervalle est inclus dans $\mathbb{Q}$; s'il contenait deux réels distincts, il contiendrait tout le segment qui les joint, donc un irrationnel. **Ainsi $f([0, 1])$ est un singleton et f est constante.**

b. Le déterminant est continu sur $M_n(\mathbb{R})$ (polynomial en les coefficients). Par l'absurde, si $GL_n(\mathbb{R})$ était connexe, $\det(GL_n(\mathbb{R}))$ serait un intervalle de $\mathbb{R}$. Or il contient $\det(I_n) = 1$ et $\det(\text{diag}(-1, 1, \dots, 1)) = -1$, donc il contiendrait 0, ce qui est impossible pour une matrice inversible. **$GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe.**

c. Le déterminant d'une matrice est un polynôme en ses coefficients, et les coefficients de $(1 - z)A + zB$ sont des polynômes de degré au plus 1 en z : P est donc polynomiale, de

degré au plus n . Elle n'est pas nulle car $P(0) = \det A \neq 0$. L'ensemble Z de ses racines est donc fini, et $0, 1 \notin Z$ puisque $P(1) = \det B \neq 0$.

Construisons un chemin de 0 à 1 dans $\mathbb{C} \setminus Z$. Pour chaque racine z_0 , les points w de la droite $\operatorname{Re} w = \frac{1}{2}$ tels que $z_0 \in [0, w] \cup [w, 1]$ sont sur la demi-droite issue de 0 passant par z_0 ou sur celle issue de 1 passant par z_0 : il y en a au plus deux. On peut donc choisir w sur cette droite de sorte que la ligne brisée $[0, w] \cup [w, 1]$ évite Z . Soit

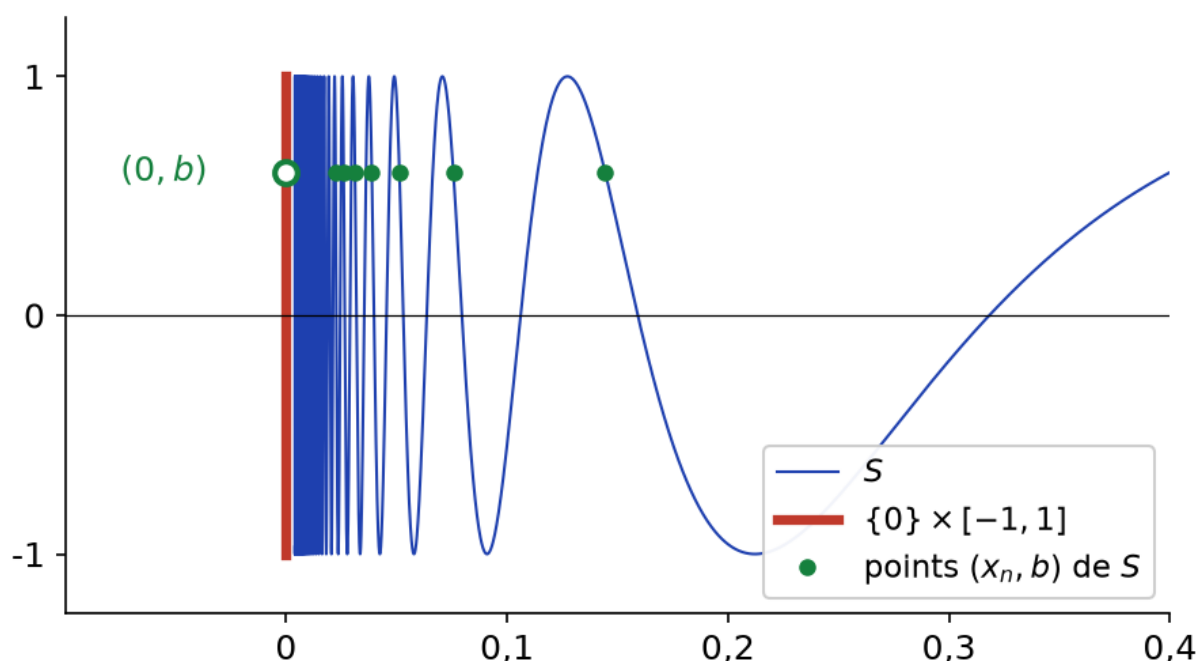
$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus Z$ un paramétrage continu de cette ligne, avec $\gamma(0) = 0$ et $\gamma(1) = 1$. On pose $\Gamma(t) = (1 - \gamma(t))A + \gamma(t)B$: Γ est continue, $\det \Gamma(t) = P(\gamma(t)) \neq 0$,

$\Gamma(0) = A$ et $\Gamma(1) = B$. **Deux matrices quelconques de $GL_n(\mathbb{C})$ sont reliées par un chemin continu dans $GL_n(\mathbb{C})$, qui est donc connexe par arcs, donc connexe.**

L'argument échoue sur $\mathbb{R}$, car on ne peut pas contourner une racine réelle de P en restant réel.

Barème : a) 1 point ; b) 1 point : 0,5 pour la continuité du déterminant, 0,5 pour l'argument d'intervalle ; c) 2 points : 0,5 pour P polynomiale non nulle, 1 point pour le chemin évitant Z , 0,5 pour la conclusion.

Exercice 5 : Problème, le sinus du topologue (4 points)



- a. L'application $\phi : x \rightarrow (x, \sin \frac{1}{x})$ est continue sur l'intervalle $]0, 1]$, qui est connexe par arcs. Deux points $\phi(a)$ et $\phi(b)$ de S sont reliés par le chemin $t \rightarrow \phi((1-t)a + tb)$. **S est connexe par arcs.**
- b. $\bar{S} \subset T$. Soit $(x_n, \sin \frac{1}{x_n})$ une suite de S qui converge vers (a, b) . Alors $a \in [0, 1]$. Si $a > 0$, par continuité de $x \rightarrow \sin \frac{1}{x}$ en a , $b = \sin \frac{1}{a}$ et $(a, b) \in S$. Si $a = 0$, comme $|\sin \frac{1}{x_n}| \leq 1$, on a $b \in [-1, 1]$. Dans les deux cas $(a, b) \in T$.
- $T \subset \bar{S}$. On a $S \subset \bar{S}$. Soit $b \in [-1, 1]$ et $\theta = \arcsin b \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Pour $n \geq 1$, $x_n = \frac{1}{\theta + 2n\pi}$ est dans $]0, 1]$ (car $\theta + 2n\pi \geq 2\pi - \frac{\pi}{2} > 1$) et $\sin \frac{1}{x_n} = \sin \theta = b$. Donc $(x_n, b) \in S$ et $(x_n, b) \rightarrow (0, b)$. **Ainsi $\bar{S} = T$.**
- c. S est connexe par arcs, donc connexe, et l'adhérence d'une partie connexe est connexe. **$T = \bar{S}$ est connexe.**
- d. L'ensemble $Z = \gamma_1^{-1}(\{0\})$ est fermé (image réciproque d'un fermé par γ_1 continue), non vide (il contient 0) et inclus dans $[0, 1]$: c'est un compact non vide de $\mathbb{R}$, qui admet un plus grand élément t_0 , et $t_0 < 1$ car $\gamma_1(1) = 1$. Pour $t > t_0$, $\gamma_1(t) \neq 0$, donc $\gamma(t) \in S$ et $\gamma_2(t) = \sin \frac{1}{\gamma_1(t)}$, avec $\gamma_1(t) > 0$.

Soit $\eta \in]0, 1 - t_0]$ et $c = \gamma_1(t_0 + \eta) > 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, γ_1 prend sur $[t_0, t_0 + \eta]$ toutes les valeurs de $[0, c]$. Pour k entier assez grand, $u_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$ et $v_k = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$ sont dans $]0, c]$: il existe $s, s' \in]t_0, t_0 + \eta]$ avec $\gamma_1(s) = u_k$ et $\gamma_1(s') = v_k$, d'où $\gamma_2(s) = 1$ et $\gamma_2(s') = -1$. Si γ_2 était continue en t_0 , il existerait η tel que $|\gamma_2(t) - \gamma_2(t_0)| < \frac{1}{2}$ sur $[t_0, t_0 + \eta]$, et l'on aurait $2 = |\gamma_2(s) - \gamma_2(s')| < 1$: contradiction. **Aucun chemin continu ne relie $(0, 0)$ à $(1, \sin 1)$ dans T : T est connexe mais n'est pas connexe par arcs.**

Barème : a) 0,5 point ; b) 1,5 point : 0,75 par inclusion ; c) 0,5 point ; d) 1,5 point : 0,5 pour l'existence de t_0 et $\gamma(t) \in S$, 1 point pour la contradiction.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : compacité, théorème de Heine et connexité

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Compacité et connexité](#) » en L3 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [compacité et connexité](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L3 sur ce thème

- [Contrôle de maths L3 : partiel de topologie des espaces normés](#)