

Corrigé du contrôle de maths L3 : Cauchy-Lipschitz, Gronwall et portrait de phase

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : le lemme de Gronwall	4 points
Exercice 2 : Explosion en temps fini	4 points
Exercice 3 : Une solution globale par le théorème des bouts	3 points
Exercice 4 : Système linéaire et exponentielle de matrice	4 points
Exercice 5 : Problème : le pendule amorti	5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : le lemme de Gronwall (4 points)

- a. **Lemme de Gronwall.** Sous ces hypothèses, si $u(t) \leq C + \int_{t_0}^t a(s) u(s) \, ds$ pour tout $t \in [t_0, T]$, alors :

$$\forall t \in [t_0, T], u(t) \leq C \exp \left(\int_{t_0}^t a(s) \, ds \right).$$

- b. La fonction v est de classe $\mathcal{C}^1$, car av est continue, et $v'(t) = a(t)u(t)$. Par hypothèse, $u \leq v$. Comme $a \geq 0$, on en déduit $v'(t) = a(t)u(t) \leq a(t)v(t)$.

Posons $w(t) = v(t)e^{-A(t)}$. Alors $A' = a$ et :

$$w'(t) = (v'(t) - a(t)v(t))e^{-A(t)} \leq 0.$$

Donc w décroît sur $[t_0, T]$, et $w(t) \leq w(t_0) = v(t_0) = C$. Ainsi $v(t) \leq C e^{A(t)}$.

Finalement, $u(t) \leq v(t) \leq C \exp \left(\int_{t_0}^t a \right)$.

- c. Soit y et z deux solutions sur $[t_0, T]$ avec $y(t_0) = z(t_0)$. Sous forme intégrale,

$$y(t) - z(t) = \int_{t_0}^t (f(s, y(s)) - f(s, z(s))) \, ds.$$

La fonction $u = |y - z|$ est continue et vérifie $u(t) \leq \int_{t_0}^t L u(s) \, ds$. Le lemme de

Gronwall, avec $C = 0$ et $a = L$, donne $u(t) \leq 0$. **Donc $u = 0$: les deux solutions coïncident sur $[t_0, T]$.**

Barème : a) 1 point ; b) 0,5 point pour $v' \leq av$ avec l'usage de $a \geq 0$, 1 point pour la dérivée de w et sa décroissance, 0,5 point pour la conclusion ; c) 0,5 point pour l'inégalité intégrale, 0,5 point pour la conclusion.

Exercice 2 : Explosion en temps fini (4 points)

- a. La fonction $f(t, y) = y^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Elle est donc localement lipschitzienne par rapport à y . **Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence et l'unicité d'une solution maximale** telle que $y(0) = y_0$.
- b. Si $y_0 = 0$, la fonction nulle est solution sur $\mathbb{R}$. Par unicité, **c'est la solution maximale**.

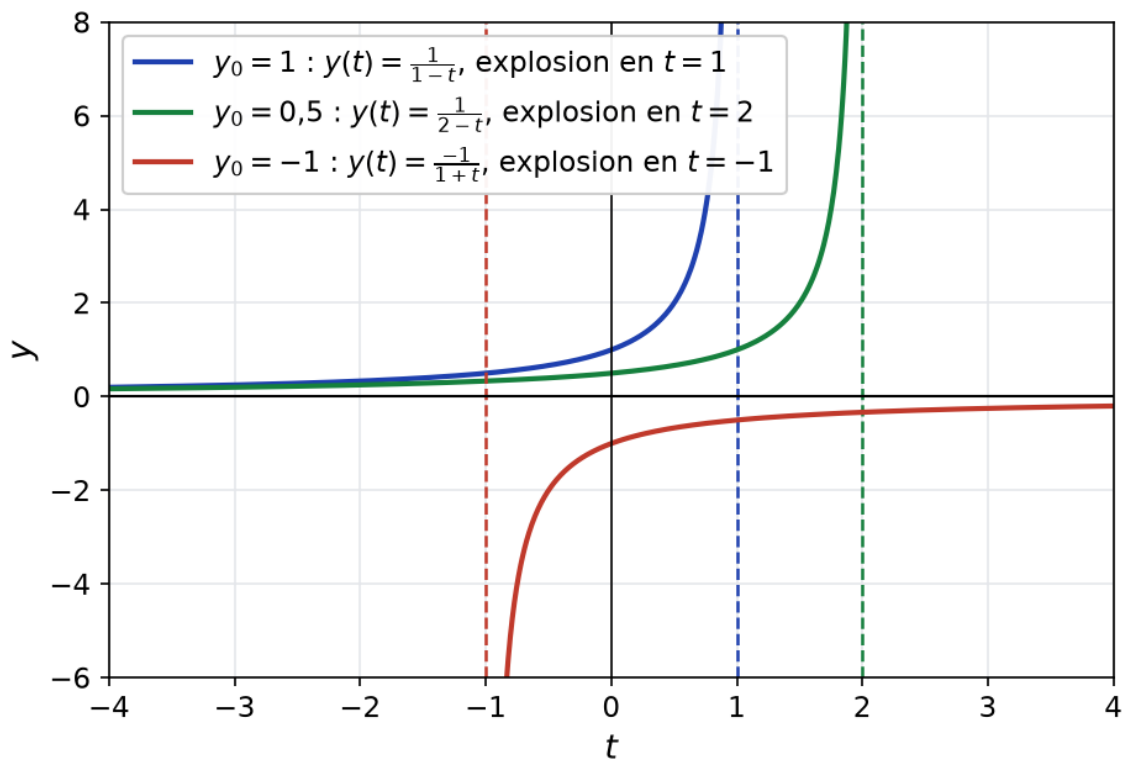
Si $y_0 \neq 0$, supposons que y s'annule en un instant t_1 . Alors y et la fonction nulle seraient deux solutions égales en t_1 . Par unicité, y serait nulle, ce qui contredit $y(0) = y_0 \neq 0$.
Donc y ne s'annule pas.

On peut alors diviser : $\frac{y'}{y^2} = 1$, soit $\left(-\frac{1}{y}\right)' = 1$. Donc $-\frac{1}{y(t)} = t - \frac{1}{y_0}$. **Ainsi**
$$y(t) = \frac{y_0}{1 - y_0 t}.$$

- c. La solution est définie sur l'intervalle contenant 0 où $1 - y_0 t \neq 0$.

Si $y_0 > 0$: l'intervalle maximal est $\left]-\infty, \frac{1}{y_0}\right[$, et $y(t) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow \frac{1}{y_0}$. **Si $y_0 < 0$** : l'intervalle maximal est $\left]\frac{1}{y_0}, +\infty\right[$, et $y(t) \rightarrow -\infty$ quand $t \rightarrow \frac{1}{y_0}$. Ces intervalles sont bien maximaux, car la solution n'est pas bornée près de la borne finie.

On parle d'**explosion en temps fini** : la solution tend vers l'infini en un instant fini, bien que f soit définie et régulière partout. Cela vient de la croissance quadratique de f , qui n'est pas globalement lipschitzienne.



Barème : a) 0,5 point pour la régularité, 0,5 point pour la conclusion ; b) 0,25 point pour le cas nul, 0,5 point pour la non-annulation par unicité, 0,75 point pour le calcul ; c) 0,5 point par intervalle avec le comportement, 0,5 point pour l'explication.

Exercice 3 : Une solution globale par le théorème des bouts (3 points)

a. La fonction $f(t,y) = \cos(ty)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, donc localement lipschitzienne en y . **D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale.**

b. Pour $t \in]T_-, T_+[$, on a $y(t) - y_0 = \int_0^t \cos(s y(s)) ds$. Comme $|\cos| \leq 1$, on obtient $|y(t) - y_0| \leq |t|$.

c. **Théorème des bouts.** Soit f continue sur $I \times \mathbb{R}^n$, localement lipschitzienne en y , où I est un intervalle ouvert. Si une solution maximale est définie sur $]T_-, T_+[$ avec $T_+ < \sup I$, alors $\|y(t)\| \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow T_+$. Il en va de même en T_- .

Ici $I = \mathbb{R}$. Supposons $T_+ < +\infty$. D'après b), $\|y(t)\| \leq \|y_0\| + T_+$ sur $[0, T_+[$: la solution reste bornée, ce qui contredit le théorème. **Donc $T_+ = +\infty$, et de même $T_- = -\infty$: la solution est globale.**

Barème : a) 1 point ; b) 1 point ; c) 0,5 point pour l'énoncé, 0,5 point pour la contradiction.

Exercice 4 : Système linéaire et exponentielle de matrice (4 points)

a. On a $N = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, puis $N^2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = -4 I_2$. Par récurrence immédiate, $N^{2m} = (-4)^m I_2$ et $N^{2m+1} = (-4)^m N$.

b. On sépare la série exponentielle, absolument convergente, en termes pairs et impairs :

$$\exp(tN) = \sum_{m \geq 0} \frac{(-1)^m (2t)^{2m}}{(2m)!} I_2 + \frac{1}{2} \sum_{m \geq 0} \frac{(-1)^m (2t)^{2m+1}}{(2m+1)!} N.$$

En effet, $t^{2m}(-4)^m = (-1)^m (2t)^{2m}$ et $t^{2m+1}(-4)^m = \frac{1}{2}(-1)^m (2t)^{2m+1}$. On reconnaît les séries de $\cos(2t)$ et de $\sin(2t)$. **Ainsi :**

$$\exp(tN) = \cos(2t) I_2 + \frac{\sin(2t)}{2} N = \begin{pmatrix} \cos 2t & 2\sin 2t \\ -\frac{1}{2} & \cos 2t \end{pmatrix}.$$

c. Les matrices tI_2 et tN commutent, donc

$\exp(tA) = \exp(tI_2)\exp(tN) = e^t \exp(tN)$. La solution du problème de Cauchy est $X(t) = \exp(tA)X(0)$:

$$\exp(tA) = e^t \begin{pmatrix} \cos 2t & 2\sin 2t \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad X(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\frac{1}{2}\sin 2t \end{pmatrix}.$$

Vérification : $u' = e^t(\cos 2t - 2\sin 2t) = u + 4v$ et

$$v' = e^t\left(-\frac{1}{2}\sin 2t - \cos 2t\right) = -u + v.$$

d. Posons $Y(t) = \exp(tN)X(0) = e^{-t}X(t)$, de composantes (p, q) . Alors

$Y' = NY$, soit $p' = 4q$ et $q' = -p$. Donc $(p^2 + 4q^2)' = 8pq - 8qp = 0$. Par conséquent :

$$u(t)^2 + 4v(t)^2 = e^{2t}(u(0)^2 + 4v(0)^2).$$

Les trajectoires non nulles sont des spirales qui s'éloignent de l'origine, en coupant des ellipses $u^2 + 4v^2 = c$ de plus en plus grandes. Les valeurs propres de A sont $1 \pm 2i$, de partie réelle positive. **L'origine est donc un équilibre instable (foyer répulsif).**

Barème : a) 0,5 point pour N^2 , 0,5 point pour les puissances ; b) 1 point pour la séparation des séries, 0,5 point pour la matrice ; c) 0,5 point pour la commutation, 0,5 point pour la solution ; d) 0,25 point pour la quantité conservée, 0,25 point pour l'instabilité.

Exercice 5 : Problème : le pendule amorti (5 points)

a. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $|(x, y)|_1 = |x| + |y|$. La fonction sinus est 1-lipschitzienne, donc :

$$|F(x, -F(x', y^{[\text{primime?}]})|_1 \leq |y - y'| + |\sin x - \sin x'| + |y - y'| \leq 2 |(x) - (x', y'e)|_1.$$

Ainsi F est 2-lipschitzienne. Soit X une solution maximale sur $]T_-, T_+[$. Comme

$F(0,0) = 0$, on a $|X(t)|_1 \leq |X(0)|_1 + \int_0^t 2|X(s)|_1 ds$ pour $t \geq 0$. Le lemme de Gronwall donne $|X(t)|_1 \leq |X(0)|_1 e^{2t}$.

Si T_+ était fini, X resterait bornée près de T_+ , ce qui contredit le théorème des bouts.

Donc $T_+ = +\infty$, de même $T_- = -\infty$: toute solution maximale est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Un équilibre vérifie $y = 0$ et $\sin x + y = 0$, donc $\sin x = 0$. **Les équilibres sont les points $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.**

c. La jacobienne vaut $J_F(x,y) = \begin{pmatrix} -\cos x & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, donc $J_F(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Son polynôme caractéristique est $\lambda(\lambda + 1) + 1 = \lambda^2 + \lambda + 1$, de discriminant -3 . Les valeurs propres sont $\lambda = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, de partie réelle $-\frac{1}{2} < 0$.

Théorème de stabilité par linéarisation. Si F est $\mathcal{C}^1$, si $F(a) = 0$ et si toutes les valeurs propres de $J_F(a)$ sont de partie réelle strictement négative, alors a est un équilibre asymptotiquement stable. **Donc $(0,0)$ est asymptotiquement stable** : c'est un foyer attractif, car les valeurs propres ne sont pas réelles. Par 2π -périodicité en x , il en va de même pour les points $(2k\pi, 0)$.

d. Comme $\cos \pi = -1$, on a $J_F(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est $\lambda^2 + \lambda - 1$, de racines $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ et $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} > 0$.

Si une valeur propre de la jacobienne est de partie réelle strictement positive, l'équilibre est instable

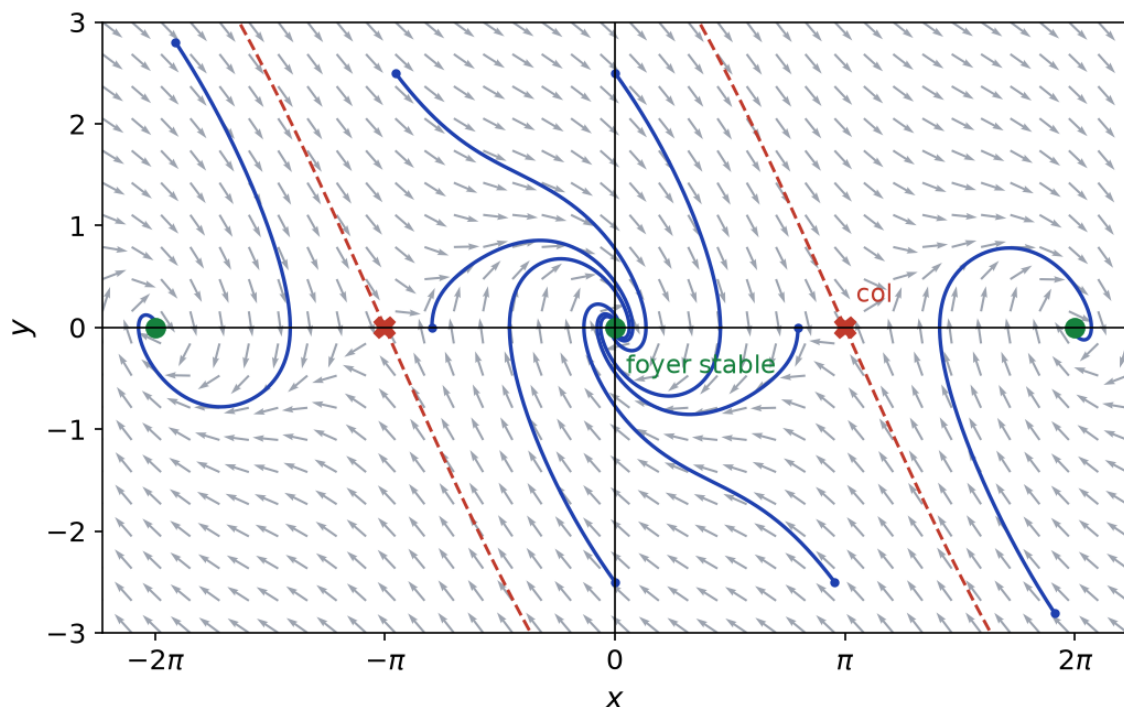
(théorème d'instabilité par linéarisation). **Donc $(\pi, 0)$ est instable : c'est un col**, comme tous les points $((2k+1)\pi, 0)$.

e. Le long d'une solution, on dérive la fonction composée :

$$\frac{d}{dt}E(x(t), y(t)) = y y' + \sin(x) x' = y(-\sin x - y) + y \sin x = -y^2 \leq 0.$$

L'énergie E décroît donc le long de toute trajectoire : le frottement dissipe l'énergie.

f. Le portrait de phase ci-dessous montre des spirales qui convergent vers les foyers $(0,0)$ et $(\pm 2\pi, 0)$. Les cols $(\pm\pi, 0)$ sont séparés par les séparatrices stables, en pointillés : elles délimitent les bassins d'attraction. **Physiquement, le pendule finit toujours par s'immobiliser en position basse**, éventuellement après avoir fait quelques tours complets.



Barème : a) 0,5 point pour le caractère lipschitzien, 0,5 point pour le caractère global ; b) 0,5 point ; c) 0,5 point pour la jacobienne, 0,5 point pour les valeurs propres, 0,5 point pour la conclusion avec le théorème ;

d) 0,5 point pour les valeurs propres, 0,5 point pour l'instabilité ; e) 0,5 point ; f) 0,5 point pour un portrait cohérent avec les équilibres.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : Cauchy-Lipschitz, Gronwall et portrait de phase

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Équations différentielles](#) » en L3 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [équations différentielles](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).