

Corrigé du contrôle de maths L2 : variables aléatoires discrètes

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : Markov, Bienaymé-Tchebychev et loi faible	4 points
Exercice 2 : Couple de variables et covariance	3 points
Exercice 3 : Fonctions génératrices et lois de Poisson	4 points
Exercice 4 : Loi géométrique et absence de mémoire	4 points
Exercice 5 : Problème : le temps de collection de vignettes	5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : Markov, Bienaymé-Tchebychev et loi faible (4 points)

a. **Inégalité de Markov :** $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$.

Démonstration. Notons $1_{(X \geq a)}$ l'indicatrice de l'événement $(X \geq a)$. Comme $X \geq 0$, on a l'inégalité $a \cdot 1_{(X \geq a)} \leq X$ sur Ω . En effet, si $X(\omega) \geq a$, le membre de gauche vaut a ; sinon il vaut 0 .

Par croissance et linéarité de l'espérance, $\alpha P(X \geq \alpha) \leq E(X)$. On divise enfin par $\alpha > 0$.

- b. Soit $\varepsilon > 0$. La variable $Y = (X - E(X))^2$ est positive et admet une espérance, égale à $V(X)$. De plus, $(|X - E(X)| \geq \varepsilon) = (Y \geq \varepsilon^2)$. L'inégalité de Markov appliquée à Y et $\alpha = \varepsilon^2$ donne :

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

C'est l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

- c. **Loi faible des grands nombres : pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.**

Démonstration. Par linéarité, $E\left(\frac{S_n}{n}\right) = m$. Les X_i sont indépendantes, donc la variance de leur somme est la somme des variances : $V(S_n) = n\sigma^2$, puis $V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\sigma^2}{n}$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne alors $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$, qui tend vers 0.

Barème : a) 0,5 point pour l'énoncé, 1 point pour la preuve par l'indicatrice ; b) 1 point ; c) 0,5 point pour l'énoncé, 0,5 point pour la variance de S_n/n (indépendance citée), 0,5 point pour la conclusion.

Exercice 2 : Couple de variables et covariance (3 points)

- a. On somme les lignes et les colonnes du tableau. $P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$;
 $P(Y = 0) = \frac{3}{8}$, $P(Y = 1) = \frac{1}{4}$, $P(Y = 2) = \frac{3}{8}$.
- b. On obtient $E(X) = \frac{1}{2}$ et $E(Y) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{3}{8} = 1$. Par le théorème de transfert, seuls les couples où $xy \neq 0$ contribuent à $E(XY)$:

$$E(XY) = 1 \times 1 \times 0 + 1 \times 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Donc $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$.

- c. On a $P(X = 1, Y = 1) = 0$, alors que $P(X = 1)P(Y = 1) = \frac{1}{8}$. **Les variables ne sont donc pas indépendantes.** Ainsi, une covariance nulle n'entraîne pas l'indépendance ; seule la réciproque est vraie.

- d. La variable X suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, donc $V(X) = \frac{1}{4}$. Ensuite,
 $E(Y^2) = \frac{1}{4} + 4 \times \frac{3}{8} = \frac{7}{4}$, donc $V(Y) = \frac{7}{4} - 1 = \frac{3}{4}$. Enfin :

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 0.$$

Donc $V(X+Y) = 1$.

Barème : a) 0,5 point ; b) 0,25 point par espérance, 0,25 point pour la covariance ; c) 0,5 point avec un contre-exemple explicite ; d) 0,25 point pour $V(X)$, 0,25 point pour $V(Y)$, 0,5 point pour $V(X+Y)$.

Exercice 3 : Fonctions génératrices et lois de Poisson (4 points)

- a. Par le théorème de transfert, pour tout réel t , la série suivante converge absolument (série exponentielle) :

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda t}.$$

Donc $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}.$

- b. La fonction génératrice est définie sur $\mathbb{R}$, donc au voisinage de 1. Ainsi X admet des moments de tout ordre, avec $E(X) = G'_X(1)$ et $E(X(X-1)) = G''_X(1)$. Or $G'_X(t) = \lambda e^{\lambda(t-1)}$ et $G''_X(t) = \lambda^2 e^{\lambda(t-1)}.$

Donc $E(X) = \lambda$, puis $V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2.$

Ainsi $V(X) = \lambda.$

- c. Les variables t^X et t^Y sont indépendantes, car fonctions de X et de Y . Donc

$$G_{X+Y}(t) = E(t^X t^Y) = G_X(t) G_Y(t) = e^{(\lambda+\mu)(t-1)}.$$

On reconnaît la fonction génératrice de la loi $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$. Or la fonction génératrice caractérise la loi. **Donc** $X + Y$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

- d. D'après c), le nombre total d'appels S suit la loi $\mathcal{P}(5)$. Donc :

$$P(S \leq 1) = e^{-5} + 5e^{-5}.$$

La probabilité cherchée vaut $6e^{-5}$.

e. Pour $0 \leq k \leq n$, par indépendance,

$P(X = k, X+Y = n) = P(X = k) P(Y = n-k)$. On divise par $P(X+Y = n)$:

$$P_{(X+Y=n)}(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\mu} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}} = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} \right)^{n-k}.$$

Sachant $X + Y = n$, la variable X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$.

Barème : a) 0,5 point pour le transfert, 0,5 point pour le calcul ; b) 0,5 point pour l'espérance, 0,5 point pour la variance ; c) 0,5 point pour le produit (indépendance citée), 0,5 point pour la caractérisation de la loi ; d) 0,5 point ; e) 0,5 point.

Exercice 4 : Loi géométrique et absence de mémoire (4 points)

a. Les nombres $q^{k-1}p$ sont positifs. De plus, la série géométrique de raison $q \in]0,1[$ converge, et $\sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}p = \frac{p}{1-q} = 1$. **On a donc bien une loi de probabilité.**

b. La série $\sum k q^{k-1} p$ est à termes positifs et converge d'après le résultat admis, car $|q| < 1$.
Donc X admet une espérance, et

$$E(X) = p \sum_{k=1}^{+\infty} k q^{k-1} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2}.$$

Ainsi $E(X) = \frac{1}{p}$.

c. Par le théorème de transfert, $E(X(X-1)) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) q^{k-1} p = pq \times \frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2q}{p^2}.$

Ensuite :

$$V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = \frac{2q}{p^2} + \frac{p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q + p - 1}{p^2}.$$

Comme $p - 1 = -q$, on obtient $V(X) = \frac{q}{p^2}.$

d. On a $P(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^{k-1} p = p \frac{q^n}{1-q} = q^n$. Comme
 $(X > n+m) \subset (X > n)$:

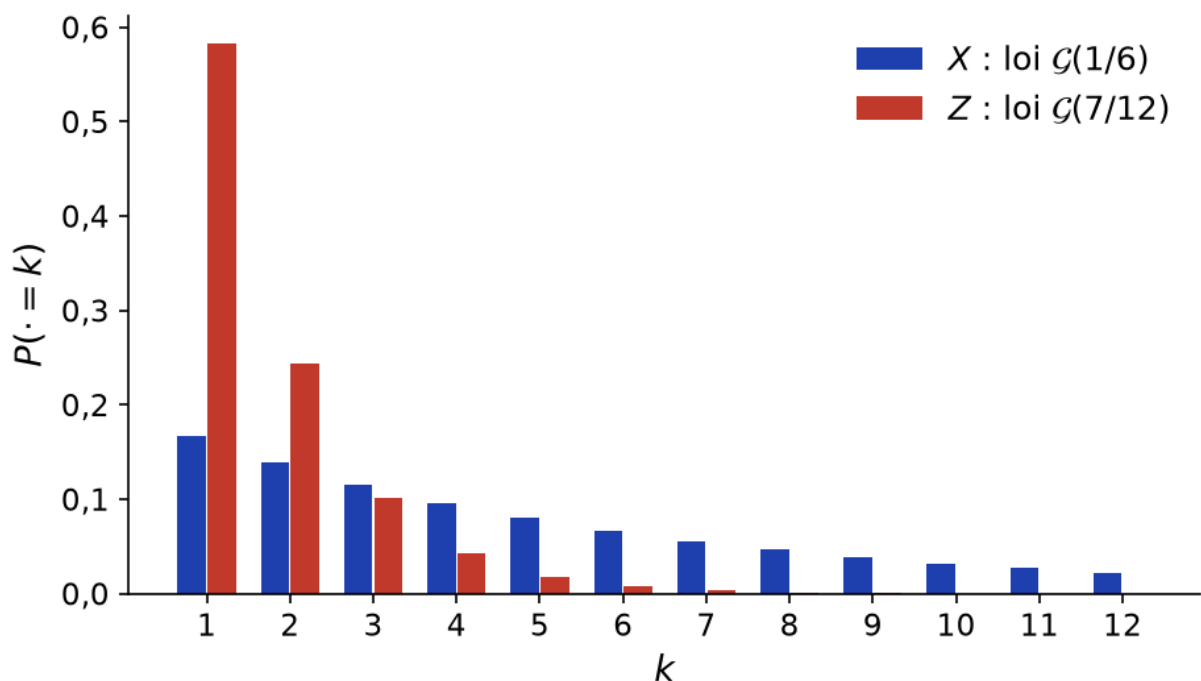
$$P_{(X > n)}(X > n+m) = \frac{P(X > n+m)}{P(X > n)} = \frac{q^{n+m}}{q^n} = q^m = P(X > m).$$

La loi géométrique est sans mémoire.

e. Ici X suit $\mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right)$ et Y suit $\mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a
 $(Z > n) = (X > n) \cap (Y > n)$. Par indépendance :

$$P(Z > n) = \left(\frac{5}{6}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{5}{12}\right)^n.$$

Pour $n \geq 1$, $P(Z = n) = P(Z > n-1) - P(Z > n) = \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} \times \frac{7}{12}$. **Donc Z suit la loi géométrique $\mathcal{G}\left(\frac{7}{12}\right)$ et $E(Z) = \frac{12}{7}$.**



Erreur fréquente : croire que Z a pour paramètre $\frac{1}{6} + \frac{1}{2}$. On passe par $P(Z > n)$, qui se factorise grâce à l'indépendance.

Barème : a) 0,5 point ; b) 0,5 point pour la convergence, 0,5 point pour le calcul ; c) 0,5 point pour $E(X(X-1))$, 0,5 point pour la variance ; d) 0,5 point ; e) 0,5 point pour $P(Z > n)$, 0,5 point pour la loi et l'espérance.

Exercice 5 : Problème : le temps de collection de vignettes (5 points)

- a. Après l'obtention de $k-1$ vignettes distinctes, chaque nouveau paquet apporte une vignette nouvelle avec la probabilité $p_k = \frac{N-(k-1)}{N}$. En effet, $N - k + 1$ vignettes manquent encore, sur N équiprobables. Les paquets étant indépendants, on répète une épreuve de Bernoulli de paramètre p_k jusqu'au premier succès.

Donc X_k est le rang du premier succès : X_k suit la loi $\mathcal{G}\left(\frac{N-k+1}{N}\right)$. Pour $k = 1$, le paramètre vaut 1 et $X_1 = 1$.

- b. Par linéarité de l'espérance et d'après l'exercice 4, $E(T_N) = \sum_{k=1}^N \frac{N}{N-k+1}$. Le changement d'indice $j = N - k + 1$ donne :

$$E(T_N) = N \sum_{j=1}^N \frac{1}{j} = N H_N.$$

Pour $N = 4$: $H_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}$. **Donc $E(T_4) = \frac{25}{3}$, soit environ 8,3 paquets.**

- c. Les X_k sont indépendantes, donc $V(T_N) = \sum_{k=1}^N V(X_k)$. D'après l'exercice 4,

$$V(X_k) = \frac{1-p_k}{p_k^2} \leq \frac{1}{p_k^2} = \frac{N^2}{(N-k+1)^2}. \text{ Avec } j = N - k + 1, \text{ on obtient}$$

$$V(T_N) \leq N^2 \sum_{j=1}^N \frac{1}{j^2}.$$

De plus, pour $j \geq 2$, $\frac{1}{j^2} \leq \frac{1}{j(j-1)} = \frac{1}{j-1} - \frac{1}{j}$. Par télescopage :

$$\sum_{j=1}^N \frac{1}{j^2} \leq 1 + \left(1 - \frac{1}{N}\right) \leq 2.$$

Donc $V(T_N) \leq 2N^2$.

- d. On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à T_N , d'espérance $N H_N$, avec l'écart $\varepsilon N H_N > 0$:

$$P(|T_N - N H_N| \geq \varepsilon N H_N) \leq \frac{V(T_N)}{\varepsilon^2 N^2 H_N^2} \leq \frac{2N^2}{\varepsilon^2 N^2 H_N^2} = \frac{2}{\varepsilon^2 H_N^2}.$$

La série harmonique diverge, donc $H_N \rightarrow +\infty$. **Par conséquent, cette probabilité tend vers 0 quand $N \rightarrow +\infty$.**

Interprétation : $\frac{T_N}{N H_N}$ converge en probabilité vers 1. Comme H_N est équivalent à $\ln N$, il faut donc acheter environ $N \ln N$ paquets pour compléter un grand album.

Barème : a) 0,5 point pour le paramètre, 0,5 point pour la justification (épreuves indépendantes, premier succès) ; b) 0,5 point pour la linéarité, 0,5 point pour $N = 4$; c) 0,5 point pour l'additivité des variances, 0,5 point pour la majoration de $V(X_k)$, 0,5 point pour le télescopage ; d) 1 point pour l'inégalité, 0,5 point pour la limite et l'interprétation.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : variables aléatoires discrètes

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Variables aléatoires discrètes](#) » en L2 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [variables aléatoires discrètes](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L2 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).