

## Corrigé du contrôle de maths L2 : variables aléatoires à densité

### Barème du contrôle

| Exercice                                                         | Points           |
|------------------------------------------------------------------|------------------|
| Exercice 1 : Question de cours : moments de la loi exponentielle | 3,5 points       |
| Exercice 2 : Une densité à queue lourde                          | 4 points         |
| Exercice 3 : Loi de $g(X)$ par la fonction muette                | 4 points         |
| Exercice 4 : Un couple à densité sur le carré unité              | 3,5 points       |
| Exercice 5 : Problème : somme et minimum de deux durées de vie   | 5 points         |
| <b>Total</b>                                                     | <b>20 points</b> |

### Exercice 1 : Question de cours : moments de la loi exponentielle (3,5 points)

- a. Une densité de probabilité est une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  positive, continue sauf en un nombre fini de points, dont l'intégrale généralisée sur  $\mathbb{R}$  converge et vaut 1. La variable  $X$  a pour densité  $f$  lorsque, pour tout réel  $x$ ,

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) \, dt.$$

**En tout point**  $x_0$  où  $f$  est continue,  $F_X$  est dérivable et  $F'_X(x_0) = f(x_0)$ .

- b. La densité de  $X$  est  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$  pour  $x \geq 0$  et 0 sinon. Les fonctions  $x \rightarrow x f(x)$  et  $x \rightarrow x^2 f(x)$  sont positives sur  $[0, +\infty[$ , donc la convergence absolue équivaut à la convergence.

**Espérance.** Soit  $A > 0$ . Une intégration par parties, avec  $u = x$  et  $v = -e^{-\lambda x}$ , donne

$$\int_0^A x \lambda e^{-\lambda x} \, dx = [-x e^{-\lambda x}]_0^A + \int_0^A e^{-\lambda x} \, dx = -A e^{-\lambda A} + \frac{1 - e^{-\lambda A}}{\lambda}.$$

Par croissances comparées,  $A e^{-\lambda A} \rightarrow 0$  quand  $A \rightarrow +\infty$ . L'intégrale converge donc, et  $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ .

**Moment d'ordre 2.** De même, avec  $u = x^2$ ,

$$\int_0^A x^2 \lambda e^{-\lambda x} \, dx = -A^2 e^{-\lambda A} + 2 \int_0^A x e^{-\lambda x} \, dx.$$

Le premier terme tend vers 0, et le calcul précédent montre que  $\int_0^A x e^{-\lambda x} \, dx \rightarrow \frac{1}{\lambda^2}$ . Ainsi

$E(X^2)$  existe et vaut  $\frac{2}{\lambda^2}$ . Enfin, la formule de König-Huygens donne  
 $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}$ . **Donc**  $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ .

Barème : a) 0,5 point pour les définitions, 0,5 point pour le lien de dérivation ; b) 0,5 point pour l'argument de positivité, 1 point pour l'espérance (intégration par parties sur un segment puis limite), 1 point pour le moment d'ordre 2 et la variance.

## Exercice 2 : Une densité à queue lourde (4 points)

---

- a. Pour que  $f$  soit positive, il faut  $c \geq 0$ . Pour  $A > 0$ , on a

$$\int_0^A \frac{dx}{(1+x)^3} = \left[ -\frac{1}{2(1+x)^2} \right]_0^A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+A)^2}, \text{ qui tend vers } \frac{1}{2}. \text{ Donc } \int_{\mathbb{R}} f = \frac{c}{2}. \text{ La}$$

**fonction  $f$  est une densité si et seulement si  $c = 2$ .**

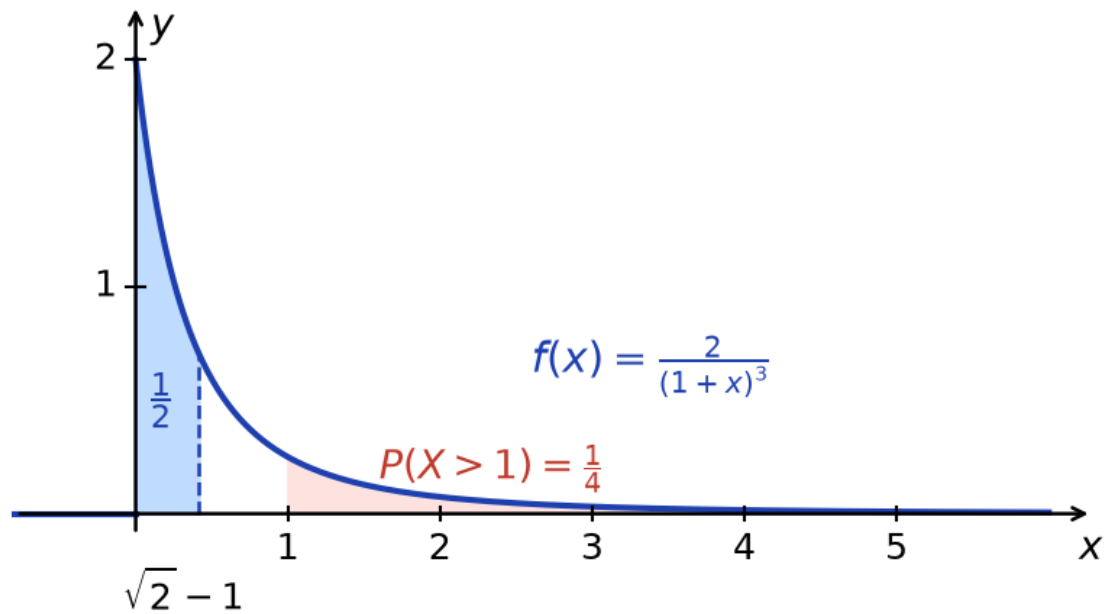
- b. Si  $x < 0$ ,  $F_X(x) = 0$ . Si  $x \geq 0$ , le calcul précédent donne

$$F_X(x) = 2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+x)^2} \right). \text{ Ainsi } F_X(x) = 1 - \frac{1}{(1+x)^2} \text{ pour } x \geq 0, \text{ et}$$

$$F_X(x) = 0 \text{ sinon.}$$

- c. D'abord,  $P(X > 1) = 1 - F_X(1) = \frac{1}{4}$ . Ensuite,  $F_X(m) = \frac{1}{2}$  équivaut à

$$(1+m)^2 = 2, \text{ avec } m \geq 0. \text{ Donc } P(X > 1) = \frac{1}{4} \text{ et la médiane vaut } m = \sqrt{2} - 1.$$



- d. La fonction  $x \rightarrow x f(x)$  est positive sur  $[0, +\infty[$  et  $x f(x) \sim \frac{2}{x^2}$  en  $+\infty$ . Par comparaison à une intégrale de Riemann convergente,  $X$  admet une espérance. Avec la décomposition proposée,

$$E(X) = 2 \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x)^3} \right) dx = 2 \left( 1 - \frac{1}{2} \right).$$

**Donc**  $E(X) = 1$ .

- e. On a  $x^2 f(x) \sim \frac{2}{x}$  en  $+\infty$ , et l'intégrale de  $\frac{1}{x}$  diverge en  $+\infty$ . Par comparaison de fonctions positives,  $E(X^2)$  n'existe pas. **La variable  $X$  n'admet pas de variance.**

Barème : a) 0,5 point pour le calcul de l'intégrale, 0,5 point pour  $c = 2$  ; b) 1 point ; c) 0,25 point par résultat ; d) 0,5 point pour la convergence justifiée, 0,5 point pour le calcul ; e) 0,5 point.

**Erreur fréquente :** calculer  $E(X^2)$  sans étudier la convergence et trouver une « valeur » absurde ; l'existence d'un moment se vérifie toujours avant son calcul.

### **Exercice 3 : Loi de $g(X)$ par la fonction muette (4 points)**

---

- a. Soit  $h$  continue bornée sur  $\mathbb{R}$ . Par le théorème de transfert,  $E(h(Y)) = \int_0^1 h\left(-\frac{\ln u}{\lambda}\right) du$ ,  
intégrale convergente car l'intégrande est borné. On pose  $u = e^{-\lambda y}$ . L'application  
 $y \rightarrow e^{-\lambda y}$  est une bijection de classe  $C^1$ , strictement décroissante, de  $]0, +\infty[$  sur  
 $]0, 1[$ , et  $du = -\lambda e^{-\lambda y} dy$ . Donc

$$E(h(Y)) = \int_0^{+\infty} h(y) \lambda e^{-\lambda y} dy.$$

**Par la méthode de la fonction muette,  $Y$  admet la densité  $y \rightarrow \lambda e^{-\lambda y}$  sur  $]0, +\infty[$  :  $Y$  suit la loi  $\mathcal{E}(\lambda)$ .**

- b. Soit  $h$  continue bornée. Par transfert, puis par parité de  $\varphi$ ,

$$E(h(X^2)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x^2) \varphi(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} h(x^2) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx.$$

On pose  $x = \sqrt{y}$  : c'est une bijection  $C^1$  croissante de  $]0, +\infty[$  sur lui-même, avec

$dx = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$ . Ainsi

$$E(h(X^2)) = \int_0^{+\infty} h(y) \frac{e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi y}} dy.$$

**Donc**  $Y = X^2$  a pour densité  $g(y) = \frac{e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi y}}$  si  $y > 0$ , et  $g(y) = 0$  sinon (loi du khi-deux à un degré de liberté). Cette densité n'est pas bornée en  $0$ , mais elle y est intégrable, car  $g(y) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi y}}$ .

- c. La densité de  $X$  est  $x \rightarrow \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}$ . Pour  $h$  continue bornée, le changement de variable affine  $u = \frac{x-m}{\sigma}$ , avec  $dx = \sigma du$ , donne

$$E\left(h\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du.$$

**Donc**  $\frac{X-m}{\sigma}$  suit la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

Barème : a) 0,5 point pour le transfert, 0,5 point pour le changement de variable justifié, 0,5 point pour la conclusion ; b) 0,5 point pour la parité, 0,5 point pour le changement de variable, 0,5 point pour la densité ; c) 0,5 point pour le changement de variable, 0,5 point pour la conclusion.

### Exercice 4 : Un couple à densité sur le carré unité (3,5 points)

---

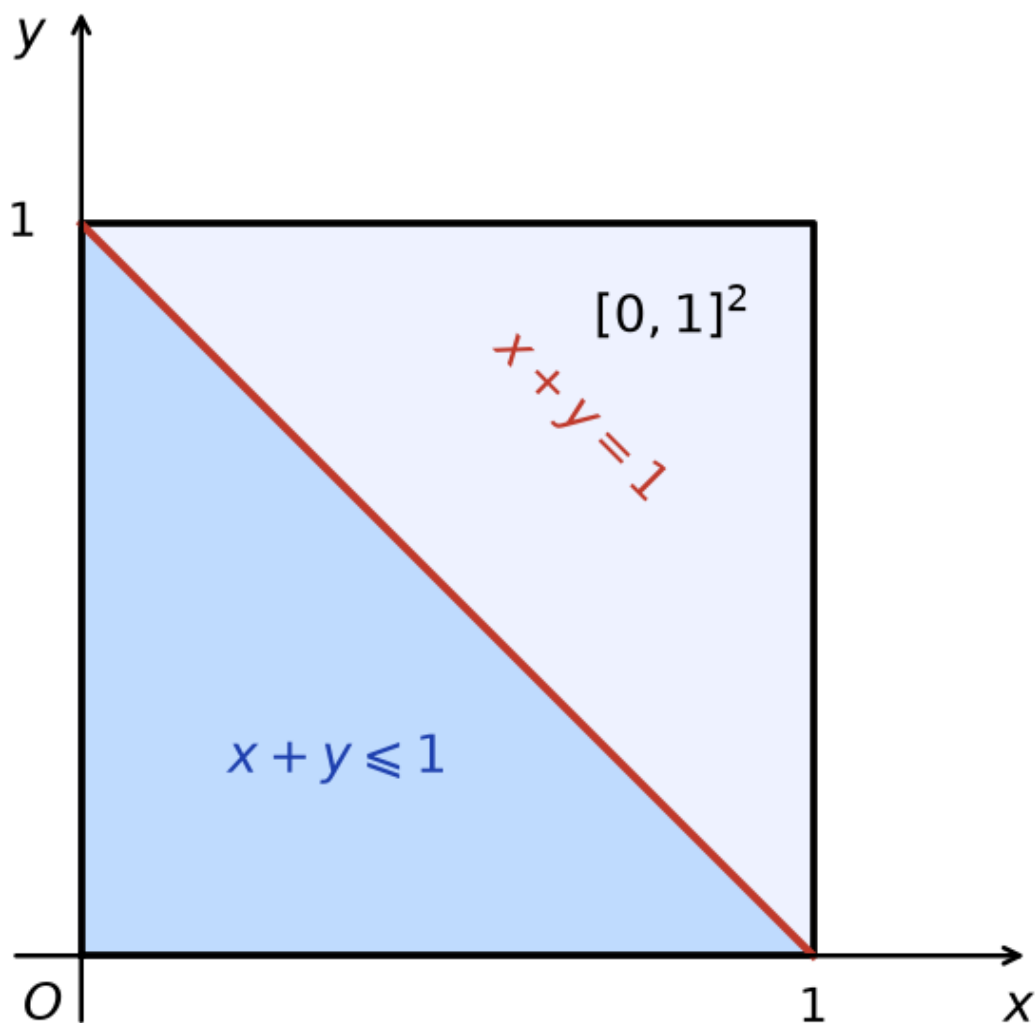
- a. La fonction  $f$  est positive et continue sur  $[0, 1]^2$ . Par Fubini,

$$\iint_{[0,1]^2} (x + y) \, dx \, dy = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \text{ Donc } f \text{ est une densité de probabilité.}$$

- b. Pour  $x \in [0, 1]$ ,  $f_X(x) = \int_0^1 (x + y) \, dy = x + \frac{1}{2}$ , et  $f_X(x) = 0$  sinon. Par symétrie des rôles,  $f_X(x) = x + \frac{1}{2}$  et  $f_Y(y) = y + \frac{1}{2}$  sur  $[0, 1]$ , nulles ailleurs.

- c. Au voisinage de  $(0, 0)$  dans le carré,  $f(x, y)$  est proche de 0, alors que  $f_X(x) f_Y(y)$  est proche de  $\frac{1}{4}$ . Ces deux fonctions continues diffèrent donc sur un ensemble d'aire non nulle.  
**Les variables  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes.**

- d. Comme  $f(x, y) = f(y, x)$ , les couples  $(X, Y)$  et  $(Y, X)$  ont même loi, donc  $P(X \leq Y) = P(Y \leq X)$ . De plus,  $P(X = Y) = 0$ , car la diagonale est d'aire nulle.  
**Ainsi  $P(X \leq Y) = \frac{1}{2}$ .**



Ensuite, le triangle  $\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x + y \leq 1 \end{array} \right\}$  est un domaine élémentaire, et

$$P(X + Y \leq 1) = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x + y) \, dy \, dx = \int_0^1 \left( x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx = \int_0^1 \frac{1-x^2}{2} \, dx.$$

**Donc**  $P(X + Y \leq 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$

e. D'une part,  $E(X) = \int_0^1 x \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ , et de même  $E(Y) = \frac{7}{12}$ . D'autre part, par transfert,

$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^1 (x^2 y + x y^2) dx dy = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

**Donc**  $\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{3} - \frac{49}{144} = -\frac{1}{144}$ , ce qui confirme la non-indépendance.

Barème : a) 0,5 point ; b) 0,5 point par densité marginale ; c) 0,5 point ; d) 0,5 point pour la symétrie, 0,5 point pour le calcul sur le triangle ; e) 0,5 point.

## **Exercice 5 : Problème : somme et minimum de deux durées de vie (5 points)**

---

- a. Le produit  $f_X(t) f_Y(s-t)$  est non nul seulement si  $t \geq 0$  et  $s-t \geq 0$ . Si  $s < 0$ , aucun  $t$  ne convient, donc  $f_S(s) = 0$ . Si  $s \geq 0$ ,

$$f_S(s) = \int_0^s \lambda e^{-\lambda t} \lambda e^{-\lambda(s-t)} dt = \lambda^2 e^{-\lambda s} \int_0^s dt = \lambda^2 s e^{-\lambda s}.$$

**On retrouve la densité annoncée** : c'est la loi gamma de paramètres 2 et  $\lambda$ .

b. La fonction  $s \rightarrow s f_S(s) = \lambda^2 s^2 e^{-\lambda s}$  est positive. De plus, d'après l'exercice 1,

$$\int_0^{+\infty} s^2 \lambda e^{-\lambda s} ds = \frac{2}{\lambda^2}, \text{ intégrale convergente. Donc } E(S) \text{ existe et}$$

$$E(S) = \lambda \times \frac{2}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda}.$$

Par linéarité,  $E(S) = E(X) + E(Y) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}$ . **Les deux méthodes donnent**  
 $E(S) = \frac{2}{\lambda}$ .

c. Pour  $s \geq 0$  et  $\lambda \neq \mu$ ,

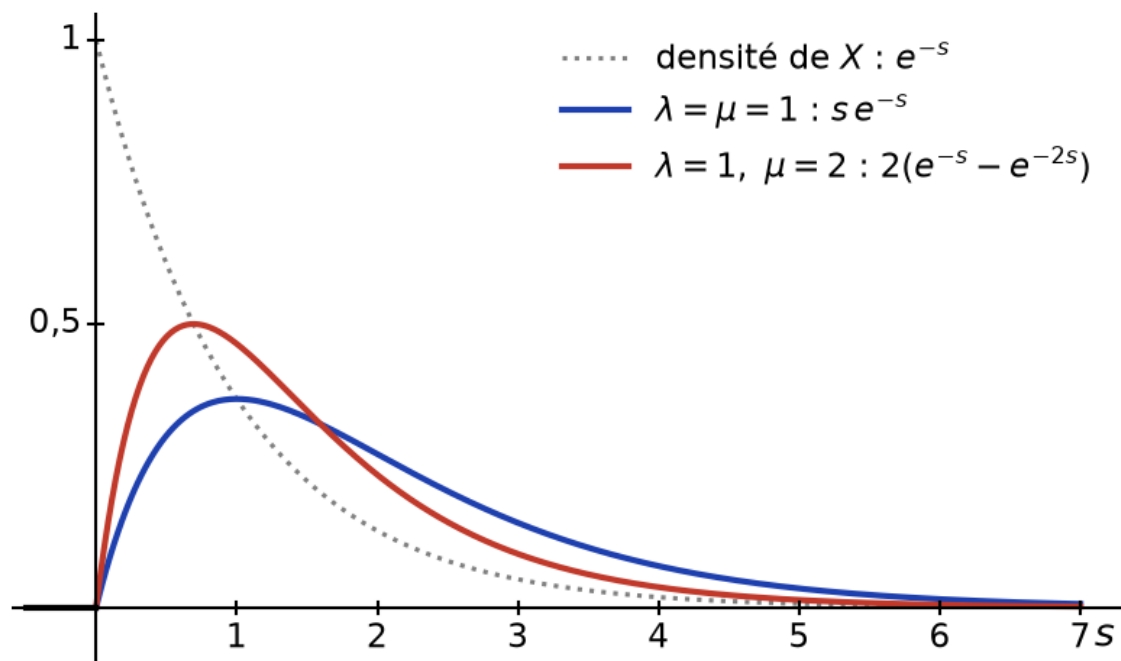
$$f_S(s) = \int_0^s \lambda e^{-\lambda t} \mu e^{-\mu(s-t)} dt = \lambda \mu e^{-\mu s} \frac{e^{(\mu-\lambda)s} - 1}{\mu - \lambda}.$$

**Ainsi**  $f_S(s) = \frac{\lambda \mu}{\mu - \lambda} (e^{-\lambda s} - e^{-\mu s})$  **pour**  $s \geq 0$ , **et**  $0$  **sinon.**

Pour  $\lambda = 1$  et  $\mu = 2$ ,  $f_S(s) = 2(e^{-s} - e^{-2s})$ . Par conséquent

$$P(S \leq 1) = \int_0^1 2(e^{-s} - e^{-2s}) ds = 2(1 - e^{-1}) - (1 - e^{-2}) = 1 - 2e^{-1} + e^{-2}.$$

**Donc**  $P(S \leq 1) = (1 - e^{-1})^2 \approx 0,40$ .



d. Pour  $t \geq 0$ , l'événement  $\{M > t\}$  est  $\{X > t\} \cap \{Y > t\}$ . Par indépendance,

$$P(M > t) = P(X > t) P(Y > t) = e^{-\lambda t} e^{-\mu t} = e^{-(\lambda + \mu)t},$$

et  $P(M > t) = 1$  si  $t < 0$ . La fonction de répartition  $1 - e^{-(\lambda + \mu)t}$  est celle de la loi  $\mathcal{E}(\lambda + \mu)$  :  $M$  suit cette loi.

Ensuite, par indépendance, le couple  $(X, Y)$  a pour densité  $f_X(x) f_Y(y)$ . Par Fubini sur  $\{0 \leq x < y\}$ ,

$$P(X < Y) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \left( \int_x^{+\infty} \mu e^{-\mu y} dy \right) dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-(\lambda + \mu)x} dx = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Pour  $\lambda = 1$  et  $\mu = 2$  :  $M$  suit  $\mathcal{E}(3)$ , d'espérance  $\frac{1}{3}$  d'année, soit 4 mois, et

$$P(X < Y) = \frac{1}{3}.$$

Barème : a) 0,5 point pour le support de l'intégrande, 1 point pour le calcul ; b) 0,5 point pour le calcul justifié, 0,5 point pour la linéarité ; c) 0,5 point pour la densité, 0,5 point pour la probabilité ; d) 0,75 point pour la loi du minimum, 0,5 point pour  $P(X < Y)$ , 0,25 point pour les valeurs numériques.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

## **Après le corrigé du contrôle : variables aléatoires à densité**

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours [« Variables aléatoires à densité » en L2](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [variables aléatoires à densité](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L2 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).