Corrigé du contrôle de maths L2 : variables aléatoires à densité

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : moments de la loi exponentielle	3,5 points
Exercice 2 : Une densité à queue lourde	4 points
Exercice 3 : Loi de g(X) par la fonction muette	4 points
Exercice 4 : Un couple à densité sur le carré unité	3,5 points
Exercice 5 : Problème : somme et minimum de deux durées de vie	5 points
Total	**20 points**

Exercice 1 : Question de cours : moments de la loi exponentielle (3,5 points)

a. Une densité de probabilité est une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ positive, continue sauf en un nombre fini de points, dont l'intégrale généralisée sur $\mathbb{R}$ converge et vaut 1. La variable X a pour densité f lorsque, pour tout réel x,

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En tout point x_0 où f est continue, F_X est dérivable et $F'_X(x_0) = f(x_0)$.

b. La densité de X est $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda\, x}$ pour $x \geq 0$ et 0 sinon. Les fonctions $x \to x\, f(x)$ et $x \to x^2\, f(x)$ sont positives sur $[0, +\infty[$, donc la convergence absolue équivaut à la convergence.

Espérance. Soit $A > 0$. Une intégration par parties, avec $u = x$ et $v = -e^{-\lambda\, x}$, donne

$$\int_0^A x\ \lambda\ e^{-\lambda\, x}\ \mathrm{d}x = \left[-x\ e^{-\lambda\, x}\right]_0^A + \int_0^A e^{-\lambda\, x}\ \mathrm{d}x = -A\ e^{-\lambda\, A} + \frac{1 - e^{-\lambda\, A}}{\lambda}.$$

Par croissances comparées, $A\, e^{-\lambda\, A} \to 0$ quand $A \to +\infty$. L'intégrale converge donc, et $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Moment d'ordre 2. De même, avec $u = x^2$,

$$\int_0^A x^2\ \lambda\ e^{-\lambda\, x}\ \mathrm{d}x = -A^2\, e^{-\lambda\, A} + 2\int_0^A x\ e^{-\lambda\, x}\ \mathrm{d}x.$$

Le premier terme tend vers 0 , et le calcul précédent montre que $\int_0^A x\, e^{-\lambda\, x}\ \mathrm{d}x \to \frac{1}{\lambda^2}$. Ainsi

$E(X^2)$ existe et vaut $\frac{2}{\lambda^2}$. Enfin, la formule de König-Huygens donne $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}$. **Donc** $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$**.**

Barème : a) 0,5 point pour les définitions, 0,5 point pour le lien de dérivation ; b) 0,5 point pour l'argument de positivité, 1 point pour l'espérance (intégration par parties sur un segment puis limite), 1 point pour le moment d'ordre 2 et la variance.

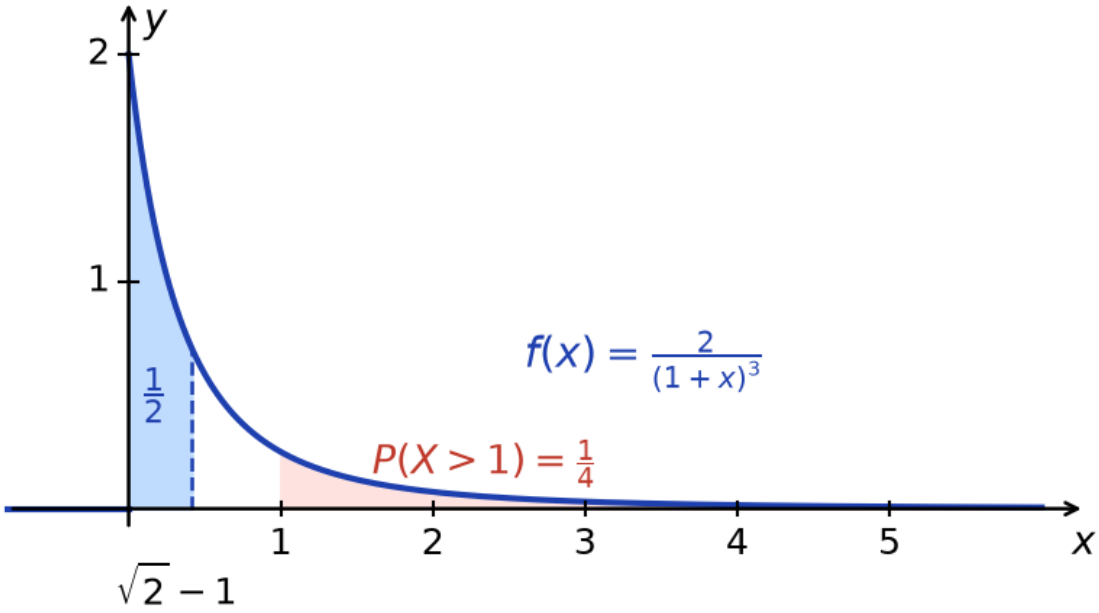
Exercice 2 : Une densité à queue lourde (4 points)

a. Pour que f soit positive, il faut $c \geq 0$. Pour $A > 0$, on a $\int_0^A \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^3} = \left[-\frac{1}{2(1+x)^2}\right]_0^A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+A)^2}$, qui tend vers $\frac{1}{2}$. Donc $\int_{\mathbb{R}} f = \frac{c}{2}$. **La fonction** f **est une densité si et seulement si** $c = 2$**.**

b. Si $x < 0$, $F_X(x) = 0$. Si $x \geq 0$, le calcul précédent donne $F_X(x) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+x)^2}\right)$. **Ainsi** $F_X(x) = 1 - \frac{1}{(1+x)^2}$ **pour** $x \geq 0$**, et** $F_X(x) = 0$ **sinon.**

c. D'abord, $P(X > 1) = 1 - F_X(1) = \frac{1}{4}$. Ensuite, $F_X(m) = \frac{1}{2}$ équivaut à $(1+m)^2 = 2$, avec $m \geq 0$. **Donc** $P(X > 1) = \frac{1}{4}$ **et la médiane vaut** $m = \sqrt{2} - 1$**.**

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.



d. La fonction $x \to x\, f(x)$ est positive sur $[0, +\infty[$ et $x\, f(x) \sim \frac{2}{x^2}$ en $+\infty$. Par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, X admet une espérance. Avec la décomposition proposée,

$$E(X) = 2\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x)^3} \right) \mathrm{d}x = 2\left(1 - \tfrac{1}{2}\right).$$

Donc $E(X) = 1$**.**

e. On a $x^2\, f(x) \sim \frac{2}{x}$ en $+\infty$, et l'intégrale de $\frac{1}{x}$ diverge en $+\infty$. Par comparaison de fonctions positives, $E(X^2)$ n'existe pas. **La variable** X **n'admet pas de variance.**

Barème : a) 0,5 point pour le calcul de l'intégrale, 0,5 point pour c = 2 ; b) 1 point ; c) 0,25 point par résultat ; d) 0,5 point pour la convergence justifiée, 0,5 point pour le calcul ; e) 0,5 point.

Erreur fréquente : calculer $E(X^2)$ sans étudier la convergence et trouver une « valeur » absurde ; l'existence d'un moment se vérifie toujours avant son calcul.

Exercice 3 : Loi de g(X) par la fonction muette (4 points)

a. Soit h continue bornée sur $\mathbb{R}$. Par le théorème de transfert, $E(h(Y)) = \int_0^1 h\left(-\frac{\ln u}{\lambda}\right) \mathrm{d}u$, intégrale convergente car l'intégrande est borné. On pose $u = e^{-\lambda y}$. L'application $y \to e^{-\lambda y}$ est une bijection de classe C^1, strictement décroissante, de $]0, +\infty[$ sur $]0, 1[$, et $\mathrm{d}u = -\lambda e^{-\lambda y}\, \mathrm{d}y$. Donc

$$E(h(Y)) = \int_0^{+\infty} h(y)\, \lambda\, e^{-\lambda y}\, \mathrm{d}y.$$

Par la méthode de la fonction muette, Y admet la densité $y \to \lambda e^{-\lambda y}$ sur $]0, +\infty[$: Y suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

b. Soit h continue bornée. Par transfert, puis par parité de φ,

$$E(h(X^2)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x^2)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} h(x^2)\, \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{d}x.$$

On pose $x = \sqrt{y}$: c'est une bijection C^1 croissante de $]0, +\infty[$ sur lui-même, avec

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{2\sqrt{y}}$. Ainsi

$$E(h(X^2)) = \int_0^{+\infty} h(y)\, \frac{e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi\, y}}\, \mathrm{d}y.$$

Donc $Y = X^2$ **a pour densité** $g(y) = \frac{e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi\, y}}$ **si** $y > 0$**, et** $g(y) = 0$ **sinon** (loi du khi-deux à un degré de liberté). Cette densité n'est pas bornée en 0, mais elle y est intégrable, car $g(y) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\, y}}$.

c. La densité de X est $x \to \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}$. Pour h continue bornée, le changement de variable affine $u = \frac{x-m}{\sigma}$, avec $\mathrm{d}x = \sigma\, \mathrm{d}u$, donne

$$E\Big(\, h\Big(\frac{X-m}{\sigma}\Big)\Big) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-u^2/2}\, \mathrm{d}u.$$

Donc $\frac{X-m}{\sigma}$ **suit la loi** $\mathcal{N}(0,1)$**.**

Barème : a) 0,5 point pour le transfert, 0,5 point pour le changement de variable justifié, 0,5 point pour la conclusion ; b) 0,5 point pour la parité, 0,5 point pour le changement de variable, 0,5 point pour la densité ; c) 0,5 point pour le changement de variable, 0,5 point pour la conclusion.

Exercice 4 : Un couple à densité sur le carré unité (3,5 points)

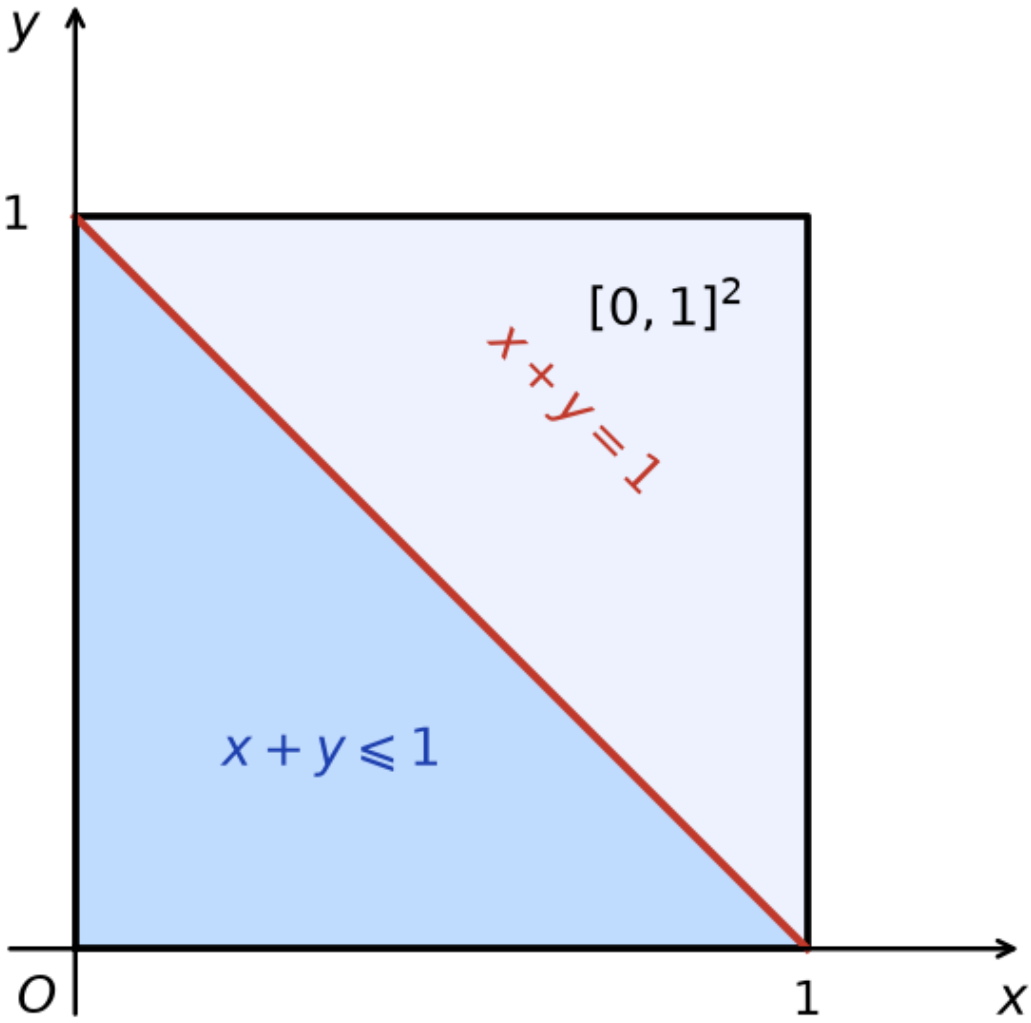
a. La fonction f est positive et continue sur $[0,1]^2$. Par Fubini, $\iint_{[0,1]^2} (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$. **Donc f est une densité de probabilité.**

b. Pour $x \in [0,1]$, $f_X(x) = \int_0^1 (x+y)\,\mathrm{d}y = x+\frac{1}{2}$, et $f_X(x) = 0$ sinon. Par symétrie des rôles, $f_X(x) = x+\frac{1}{2}$ **et** $f_Y(y) = y+\frac{1}{2}$ **sur** $[0,1]$, nulles ailleurs.

c. Au voisinage de $(0,0)$ dans le carré, $f(x,y)$ est proche de 0, alors que $f_X(x)\,f_Y(y)$ est proche de $\frac{1}{4}$. Ces deux fonctions continues diffèrent donc sur un ensemble d'aire non nulle. **Les variables X et Y ne sont pas indépendantes.**

d. Comme $f(x,y) = f(y,x)$, les couples (X,Y) et (Y,X) ont même loi, donc $P(X \leq Y) = P(Y \leq X)$. De plus, $P(X=Y) = 0$, car la diagonale est d'aire nulle. **Ainsi $P(X \leq Y) = \frac{1}{2}$.**

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.



Ensuite, le triangle $\left\{\begin{matrix} x \geq 0, \\ \geq 0, \\ ,x +,+ y \leq 1 \end{matrix}\right\}$ est un domaine élémentaire, et

$$P(X+Y\leq 1)=\int_0^1\int_0^{1-x}(x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x(1-x)+\frac{(1-x)^2}{2}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1-x^2}{2}\,\mathrm{d}x.$$

Donc $P(X+Y\leq 1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$.

e. D'une part, $E(X) = \int_0^1 x\left(x + \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$, et de même $E(Y) = \frac{7}{12}$. D'autre part, par transfert,

$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^1 (x^2\, y + x\, y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Donc $\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{1}{3} - \frac{49}{144} = -\frac{1}{144}$, ce qui confirme la non-indépendance.

Barème : a) 0,5 point ; b) 0,5 point par densité marginale ; c) 0,5 point ; d) 0,5 point pour la symétrie, 0,5 point pour le calcul sur le triangle ; e) 0,5 point.

Exercice 5 : Problème : somme et minimum de deux durées de vie (5 points)

a. Le produit $f_X(t)\, f_Y(s-t)$ est non nul seulement si $t \geq 0$ et $s - t \geq 0$. Si $s < 0$, aucun t ne convient, donc $f_S(s) = 0$. Si $s \geq 0$,

$$f_S(s) = \int_0^s \lambda\, e^{-\lambda\, t}\, \lambda\, e^{-\lambda(s\, -\, t)}\, \mathrm{d}t = \lambda^2\, e^{-\lambda\, s} \int_0^s \mathrm{d}t = \lambda^2\, s\, e^{-\lambda\, s}.$$

On retrouve la densité annoncée : c'est la loi gamma de paramètres 2 et λ.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

b. La fonction $s \to s\, f_S(s) = \lambda^2 s^2 e^{-\lambda s}$ est positive. De plus, d'après l'exercice 1, $\int_0^{+\infty} s^2 \lambda e^{-\lambda s}\, \mathrm{d}s = \frac{2}{\lambda^2}$, intégrale convergente. Donc $E(S)$ existe et $E(S) = \lambda \times \frac{2}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda}$.

Par linéarité, $E(S) = E(X) + E(Y) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}$. **Les deux méthodes donnent** $E(S) = \frac{2}{\lambda}$.

c. Pour $s \geq 0$ et $\lambda \neq \mu$,

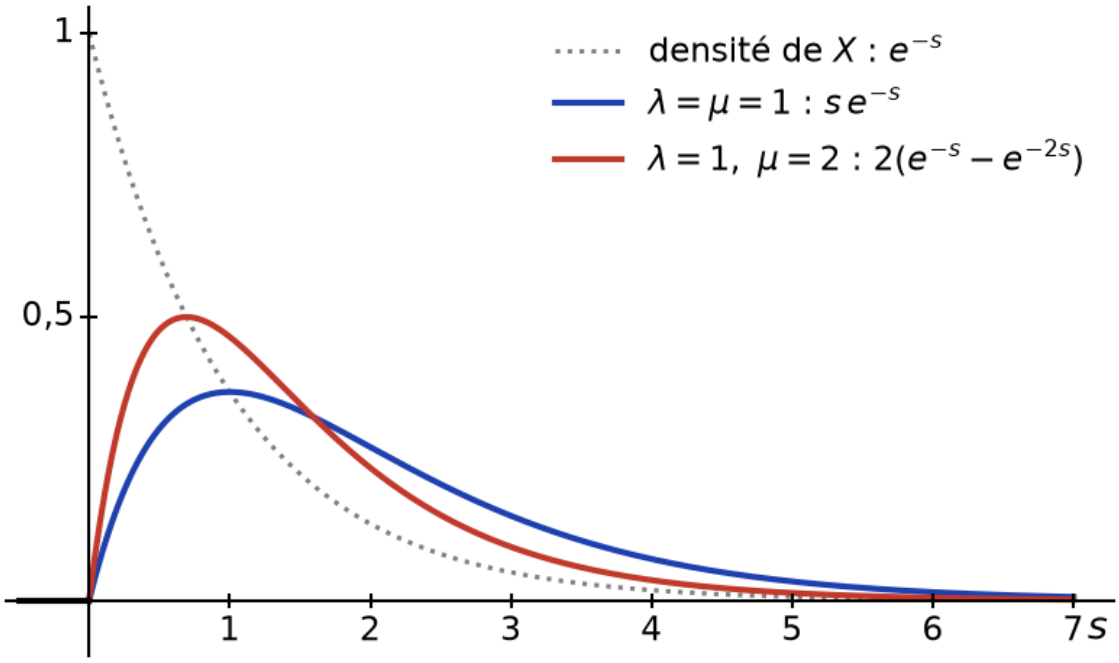
$$f_S(s) = \int_0^s \lambda\, e^{-\lambda t}\, \mu\, e^{-\mu(s-t)}\, \mathrm{d}t = \lambda \mu\, e^{-\mu s}\, \frac{e^{(\mu-\lambda)s} - 1}{\mu - \lambda}.$$

Ainsi $f_S(s) = \frac{\lambda\mu}{\mu - \lambda}\left(e^{-\lambda s} - e^{-\mu s}\right)$ **pour** $s \geq 0$**, et** 0 **sinon.**

Pour $\lambda = 1$ et $\mu = 2$, $f_S(s) = 2\left(e^{-s} - e^{-2s}\right)$. Par conséquent

$$P(S \leq 1) = \int_0^1 2\left(e^{-s} - e^{-2s}\right) \mathrm{d}s = 2\left(1 - e^{-1}\right) - \left(1 - e^{-2}\right) = 1 - 2e^{-1} + e^{-2}.$$

Donc $P(S \leq 1) = \left(1 - e^{-1}\right)^2 \approx 0{,}40$.



d. Pour $t \geq 0$, l'événement $\{M > t\}$ est $\{X > t\} \cap \{Y > t\}$. Par indépendance,

$$P(M > t) = P(X > t)\, P(Y > t) = e^{-\lambda\, t}\, e^{-\mu\, t} = e^{-(\lambda\, +\, \mu)t},$$

et $P(M > t) = 1$ si $t < 0$. **La fonction de répartition $1 - e^{-(\lambda + \mu)t}$ est celle de la loi $\mathcal{E}(\lambda + \mu)$: M suit cette loi.**

Ensuite, par indépendance, le couple (X, Y) a pour densité $f_X(x)\, f_Y(y)$. Par Fubini sur $\{0 \leq x < y\}$,

$$P(X < Y) = \int_0^{+\infty} \lambda\, e^{-\lambda\, x} \left(\int_x^{+\infty} \mu\, e^{-\mu\, y}\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lambda\, e^{-(\lambda\, +\, \mu)x}\, \mathrm{d}x = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Pour $\lambda = 1$ et $\mu = 2$: M suit $\mathcal{E}(3)$, d'espérance $\frac{1}{3}$ d'année, soit 4 mois, et

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$$P(X < Y) = \frac{1}{3}.$$

Barème : a) 0,5 point pour le support de l'intégrande, 1 point pour le calcul ; b) 0,5 point pour le calcul justifié, 0,5 point pour la linéarité ; c) 0,5 point pour la densité, 0,5 point pour la probabilité ; d) 0,75 point pour la loi du minimum, 0,5 point pour P(X < Y), 0,25 point pour les valeurs numériques.

Revenir à l'énoncé du contrôle

Après le corrigé du contrôle : variables aléatoires à densité

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « Variables aléatoires à densité » en L2 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** variables aléatoires à densité.

Retrouvez tous les **contrôles de maths de L2** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.