

Corrigé du contrôle de maths L2 : valeurs propres et diagonalisation

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours, sous-espaces propres en somme directe	4 points
Exercice 2 : Une matrice diagonalisable et une qui ne l'est pas	5 points
Exercice 3 : Une matrice à paramètre et ses puissances	5 points
Exercice 4 : Problème, trois réservoirs couplés	6 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours, sous-espaces propres en somme directe (4 points)

- a. On note $\mathcal{P}(p)$ la propriété de l'énoncé. Pour $p = 1$, $x_1 = 0$: c'est immédiat. Supposons $\mathcal{P}(p-1)$ vraie pour un $p \geq 2$, et soit $x_1 + \dots + x_p = 0$ avec $x_i \in E_{\lambda_i}(u)$. On applique u , puis on retranche λ_p fois la relation initiale :

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^p \lambda_p x_i = 0, \text{ donc } \sum_{i=1}^{p-1} (\lambda_i - \lambda_p) x_i = 0.$$

Chaque $(\lambda_i - \lambda_p)x_i$ appartient à $E_{\lambda_i}(u)$. Par $\mathcal{P}(p-1)$, $(\lambda_i - \lambda_p)x_i = 0$ pour $i \leq p-1$. Or $\lambda_i \neq \lambda_p$, donc $x_i = 0$. Il reste $x_p = 0$. La récurrence est établie. **Les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.**

- b. Si u a n valeurs propres distinctes, on choisit un vecteur propre e_i pour chacune. D'après a), la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre : une combinaison nulle $\sum \mu_i e_i = 0$ a ses termes $\mu_i e_i \in E_{\lambda_i}(u)$, qui sont donc tous nuls. C'est une famille libre de n vecteurs en dimension n : **une base de vecteurs propres, donc u est diagonalisable.**
- c. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de u et $F = E_{\lambda_1}(u) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}(u)$. La somme étant directe, $\dim F = \sum \dim E_{\lambda_i}(u) \leq n$. Si u est diagonalisable, une base de vecteurs propres est contenue dans F , donc $F = E$ et la somme des dimensions vaut n . Réciproquement, si cette somme vaut n , alors $F = E$. En concaténant des bases des $E_{\lambda_i}(u)$, on obtient une base de E formée de vecteurs propres. **D'où l'équivalence.**

Barème : a) 2 points : 0,5 pour l'initialisation, 1 pour l'hérédité (application de u et combinaison), 0,5 pour la conclusion sur la somme directe ; b) 1 point ; c) 1 point (0,5 par sens).

Exercice 2 : Une matrice diagonalisable et une qui ne l'est pas (5 points)

- a. Dans $A - \lambda I_3$, la somme des trois colonnes vaut $(1-\lambda, 1-\lambda, 1-\lambda)$. On remplace C_1 par $C_1 + C_2 + C_3$, ce qui ne change pas le déterminant, puis on factorise $1 - \lambda$. Ensuite, les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ donnent une matrice triangulaire :

$$\det(A - \lambda I_3) = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 4-\lambda & -1 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda).$$

Comme $\chi_A(\lambda) = (-1)^3 \det(A - \lambda I_3)$, on obtient $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$. Les valeurs propres sont 1, 2 et 3, toutes simples.

- b. On résout $(A - \lambda I_3)X = 0$ pour chaque valeur propre.

Pour $\lambda = 1$: les lignes donnent $y - z = 0$ et $-2x + 2y = 0$, d'où $x = y = z$ et $E_1(A) = \text{Vect}((1, 1, 1))$.

Pour $\lambda = 2$: $-x + y - z = 0$ et $-2x + 2y - z = 0$. Par différence, $z = 0$, puis $x = y$: $E_2(A) = \text{Vect}((1, 1, 0))$.

Pour $\lambda = 3$: $-2x + y - z = 0$ et $-2x + 2y - 2z = 0$, d'où $x = 0$ et $y = z$:

$$E_3(A) = \text{Vect}((0, 1, 1)).$$

Les trois valeurs propres sont distinctes, donc A est diagonalisable (exercice 1 b). Avec les vecteurs propres en colonnes :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \det P = 1 \neq 0, \quad A = PDP^{-1}$$

c. Dans $B - \lambda I_3$, on remplace C_1 par $C_1 + C_2$, qui vaut $(2-\lambda, 2-\lambda, 0)$, puis on factorise $2 - \lambda$ et on fait $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$:

$$\det(B - \lambda I_3) = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)((1-\lambda)(3-\lambda) + 1) = (2-\lambda)(\lambda - 2)^2.$$

Ainsi $\chi_B(\lambda) = (\lambda - 2)^3$: 2 est l'unique valeur propre, de multiplicité 3. Or

$$B - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

est de rang 1 (lignes proportionnelles, non nulles). Par le théorème du rang, $\dim E_2(B) = 2$, et $E_2(B)$ est le plan d'équation $x - y + z = 0$. La somme des dimensions des sous-espaces propres vaut $2 \neq 3$: **B n'est pas diagonalisable**. Autre argument : si elle l'était, elle serait semblable à $2I_3$, donc égale à $2I_3$, ce qui est faux.

Barème : a) 1,5 point : 1 pour le calcul du déterminant, 0,5 pour la factorisation ; b) 1,5 point : 1 pour les trois sous-espaces propres, 0,5 pour P et D ; c) 2 points : 1 pour χ_B , 0,5 pour la dimension, 0,5 pour la conclusion.

Exercice 3 : Une matrice à paramètre et ses puissances (5 points)

a. La matrice M_a est triangulaire supérieure : $\chi_{M_a}(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$. **Les valeurs propres sont 2 (double) et 1 (simple).**

b. On a

$$M_a - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & -a \\ -1 & a \end{vmatrix} = a^2 - a = a(a-1).$$

Si $a \notin \{0, 1\}$, ce mineur est non nul et le rang vaut 2 (la troisième ligne est nulle). Si $a = 0$, la seule ligne non nulle est $(0, -1, 0)$: rang 1. Si $a = 1$, les lignes $(0, 1, -1)$ et $(0, -1, 1)$ sont opposées : rang 1. Par le théorème du rang, $\dim E_2(M_a) = 2$ si $a \in \{0, 1\}$, et $\dim E_2(M_a) = 1$ sinon. Enfin, 1 est valeur propre simple, donc $1 \leq \dim E_1(M_a) \leq 1$: $\dim E_1(M_a) = 1$.

c. D'après l'exercice 1 c), M_a est diagonalisable si et seulement si $\dim E_2(M_a) + \dim E_1(M_a) = 3$, c'est-à-dire $\dim E_2(M_a) = 2$. M_a est diagonalisable si et seulement si $a \in \{0, 1\}$.

d. Pour $a = 1$, $E_2(M_1)$ est défini par $y - z = 0$: une base est $((1, 0, 0), (0, 1, 1))$. Ensuite, $M_1 - I_3$ a pour lignes $(1, 1, -1)$, $(0, 0, 1)$ et $(0, 0, 1)$, d'où $z = 0$ et $x = -y$: $E_1(M_1) = \text{Vect}((1, -1, 0))$. Ainsi

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $PP^{-1} = I_3$. On a alors $M_1 = PDP^{-1}$.

e. Par récurrence, $M_1^n = PD^nP^{-1}$ avec $D^n = \text{diag}(2^n, 2^n, 1)$. Le calcul donne

$$PD^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 1 \\ 0 & 2^n & -1 \\ 0 & 2^n & 0 \end{pmatrix}, \quad M_1^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 & 1 - 2^n \\ 0 & 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Contrôle : pour $n = 0$, on retrouve I_3 ; pour $n = 1$, on retrouve M_1 .

Barème : a) 0,5 point ; b) 1,5 point : 1 pour la discussion du rang, 0,5 pour $\dim E_1$; c) 1 point ; d) 1 point ; 0,5 pour les vecteurs propres, 0,5 pour P^{-1} ; e) 1 point.

Exercice 4 : Problème, trois réservoirs couplés (6 points)

a. Le système s'écrit $X_{n+1} = AX_n$ avec

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}(I_3 + J).$$

Par une récurrence immédiate, $X_n = A^n X_0$ pour tout $n \geq 0$.

b. La matrice J est de rang 1, donc $\ker J$ est de dimension 2 : c'est le plan Π d'équation $x + y + z = 0$, sous-espace propre pour la valeur propre 0. De plus, $Je = 3e$ pour $e = (1, 1, 1)$. Pour X propre pour J avec la valeur μ , $AX = \frac{1+\mu}{4}X$. Ainsi $E_1(A) = \text{Vect}(e)$ et $E_{1/4}(A) = \Pi$, de base $((1, -1, 0), (1, 0, -1))$. La somme des dimensions vaut $1 + 2 = 3$: A est diagonalisable. On pouvait aussi invoquer le fait que A est symétrique réelle.

c. On a $Qe = e$ et $QX = 0$ pour $X \in \Pi$. Comparons les deux membres sur la base $(e, (1, -1, 0), (1, 0, -1))$. Pour e : $A^n e = e$, et $Qe + 4^{-n}(e - Qe) = e$. Pour $X \in \Pi$: $A^n X = 4^{-n}X$, et $QX + 4^{-n}(X - QX) = 4^{-n}X$. Les deux matrices coïncident sur une base de $\mathbb{R}^3$, donc $A^n = Q + \frac{1}{4^n}(I_3 - Q)$.

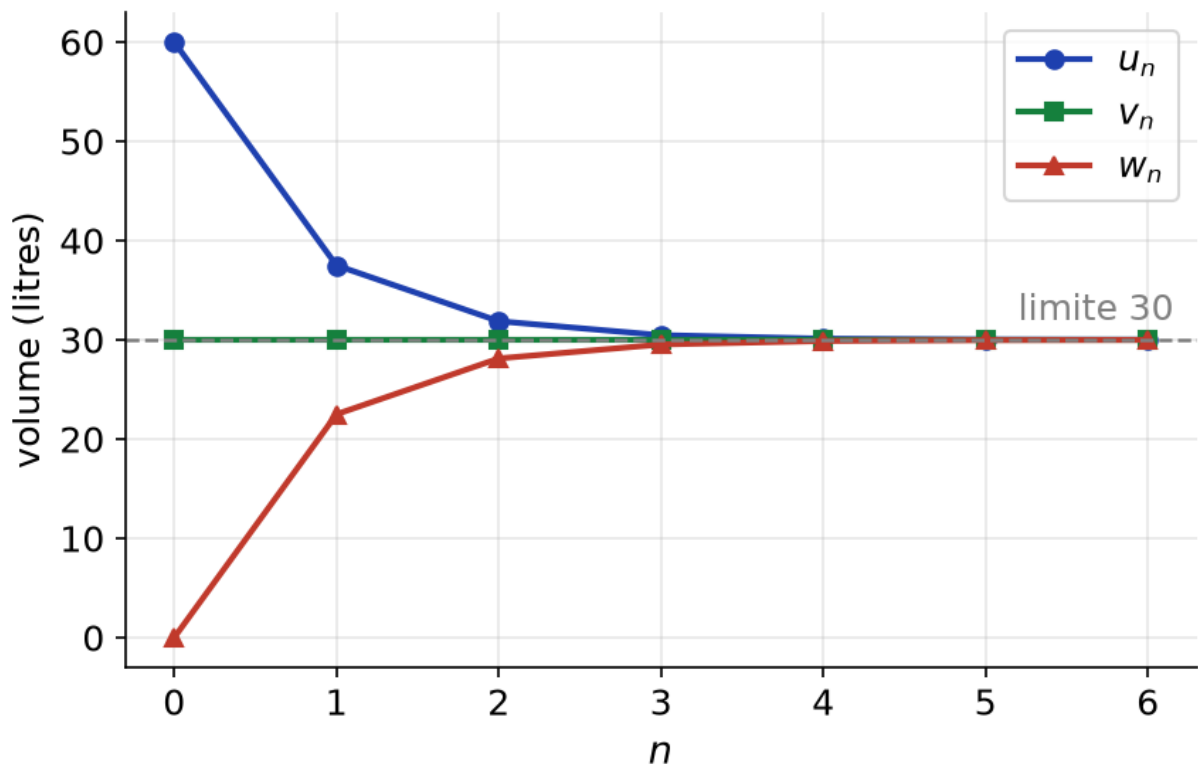
d. Avec $X_0 = (60, 30, 0)$, on a $QX_0 = \frac{90}{3}(1, 1, 1) = (30, 30, 30)$ et $X_0 - QX_0 = (30, 0, -30)$. Donc

$$u_n = 30 + \frac{30}{4^n}, \quad v_n = 30, \quad w_n = 30 - \frac{30}{4^n}.$$

Contrôle : $u_1 = 37,5$, $v_1 = 30$, $w_1 = 22,5$, ce que donne aussi le système. Comme $4^{-n} \rightarrow 0$, **les trois suites convergent vers 30**.

e. En additionnant les trois relations,

$u_{n+1} + v_{n+1} + w_{n+1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)(u_n + v_n + w_n) = u_n + v_n + w_n$. **Le volume total reste égal à 90 litres** : l'eau est seulement redistribuée, et elle tend à se répartir équitablement, soit 30 litres par réservoir. Enfin, $u_n - w_n = \frac{60}{4^n} < 1$ équivaut à $4^n > 60$. Comme $4^2 = 16$ et $4^3 = 64$, **l'écart est inférieur à 1 litre à partir de l'étape 3**.



Erreur fréquente : calculer P^{-1} alors que la décomposition $A^n = Q + 4^{-n}(I_3 - Q)$ évite tout calcul d'inverse.

Barème : a) 0,5 point ; b) 2 points : 1 pour les éléments propres de J , 0,5 pour ceux de A , 0,5 pour la diagonalisabilité ; c) 1,5 point : 0,5 par vecteur de la base, 0,5 pour la conclusion ; d) 1 point (0,5 pour les formules, 0,5 pour les limites) ; e) 1 point (0,5 pour la conservation et l'interprétation, 0,5 pour le rang 3).

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : valeurs propres et diagonalisation

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours [« Diagonalisation » en L2](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [diagonalisation](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L2 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).