

Corrigé du contrôle de maths L2 : séries numériques à termes positifs

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours, le critère de Riemann	4 points
Exercice 2 : Nature de cinq séries	5 points
Exercice 3 : Deux séries à paramètre	3 points
Exercice 4 : Encadrer deux sommes partielles	3 points
Exercice 5 : Problème, équivalent du reste d'une série de Riemann	5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours, le critère de Riemann (4 points)

- a. Soit $k \geq 2$. Pour $t \in [k-1, k]$, on a $0 < k-1 \leq t \leq k$. Comme $\alpha > 0$, la fonction $t \rightarrow t^\alpha$ est croissante sur $]0, +\infty[$, donc $\frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{(k-1)^\alpha}$. On intègre ces inégalités sur un intervalle de longueur 1 (croissance de l'intégrale) : $\frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{(k-1)^\alpha}$.

- b. On somme l'inégalité de gauche pour k de 2 à n (relation de Chasles) :

$$S_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = 1 + \frac{1-n^{1-\alpha}}{\alpha-1} \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1} = \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

La suite (S_n) est croissante, car ses termes ajoutés sont positifs, et elle est majorée. Par le théorème de la limite monotone, elle converge. **Donc la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$.**

c. On somme cette fois l'inégalité de droite pour k de 2 à n :

$$\int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)^\alpha} = S_{n-1}.$$

Si $\alpha = 1$, l'intégrale vaut $\ln n$, qui tend vers $+\infty$. Si $0 < \alpha < 1$, elle vaut $\frac{n^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}$, qui tend aussi vers $+\infty$ car $1-\alpha > 0$. Par comparaison, $S_{n-1} \rightarrow +\infty$: **la série diverge pour $0 < \alpha \leq 1$** . Enfin, si $\alpha \leq 0$, on a $\frac{1}{n^\alpha} = n^{-\alpha} \geq 1$: le terme général ne tend pas vers 0 et la série **diverge grossièrement**.

Barème : a) 1 point (0,5 pour la monotonie de $t \rightarrow t^\alpha$, 0,5 pour l'intégration) ; b) 1,5 point : 0,5 pour la sommation, 0,5 pour le calcul de l'intégrale, 0,5 pour l'argument de limite monotone ; c) 1,5 point : 0,5 pour la minoration, 0,5 pour les deux calculs d'intégrale, 0,5 pour le cas $\alpha \leq 0$.

Exercice 2 : Nature de cinq séries (5 points)

- a. Le terme u_n est positif et $u_n \sim \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$. Or $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente ($2 > 1$). Par le théorème de comparaison par équivalents pour les séries à termes positifs, $\sum u_n$ **converge**.
- b. On a $1 - \cos x \geq 0$ et $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ quand $x \rightarrow 0$. Comme $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, $u_n \sim \frac{1}{2n^2}$, terme positif d'une série convergente. Par équivalence, $\sum u_n$ **converge**.
- c. On a $u_n > 0$ et $\ln(1+x) \sim x$ quand $x \rightarrow 0$, donc $u_n \sim \frac{1}{n^{1/2}}$. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{1/2}}$ diverge car $\frac{1}{2} \leq 1$. Par équivalence de séries à termes positifs, $\sum u_n$ **diverge**.
- d. Le terme u_n est strictement positif et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{2}$. La limite est strictement inférieure à 1, donc, d'après la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ **converge**.

e. Le terme u_n est strictement positif et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right).$$

Comme $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 1$, le rapport tend vers $e^{-1} < 1$. Par la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ **converge**.

Erreur fréquente : appliquer un équivalent sans vérifier que les termes sont positifs, ou conclure avec la règle de d'Alembert quand la limite du rapport vaut 1.

Barème : 1 point par série : 0,5 pour l'équivalent ou la limite du rapport, 0,5 pour le critère cité avec ses hypothèses et la conclusion.

Exercice 3 : Deux séries à paramètre (3 points)

a. La fonction exponentielle est convexe, donc $e^x \geq 1 + x$ avec égalité seulement pour $x = 0$.

Avec $x = \frac{1}{n} \neq 0$, on obtient $e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n} > 0$, donc $u_n > 0$. Ensuite,

$e^x - 1 - x \sim \frac{x^2}{2}$ quand $x \rightarrow 0$, d'où

$$u_n \sim n^a \times \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2n^{2-a}}.$$

Par comparaison avec la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{2-a}}$, la série converge si et seulement si $2 - a > 1$. Ainsi, $\sum u_n$ **converge si et seulement si** $a < 1$.

b. Si $a \leq 0$, alors $1 - \frac{a}{n} \geq 1$, donc $w_n \geq 1$: le terme général ne tend pas vers 0, la série **diverge grossièrement**. Si $a > 0$, pour $n > a$ on a $0 < 1 - \frac{a}{n} < 1$, donc $w_n > 0$ et

$$(w_n)^{1/n} = \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{a}{n}\right)\right) \rightarrow e^{-a}.$$

En effet, $n \ln\left(1 - \frac{a}{n}\right) \sim n \times \left(-\frac{a}{n}\right) = -a$. Comme $e^{-a} < 1$, la règle de Cauchy donne la convergence. **Conclusion :** $\sum w_n$ **converge si et seulement si** $a > 0$.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour la positivité, 0,5 pour l'équivalent, 0,5 pour la discussion ; b) 1,5 point : 0,5 pour le cas $\alpha \leq 0$, 1 pour la règle de Cauchy (limite et conclusion).

Exercice 4 : Encadrer deux sommes partielles (3 points)

a. La fonction $t \rightarrow \frac{1}{t}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$. Pour $k \geq 1$ et $t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$

, donc $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$. En sommant de 1 à n : $\ln(n+1) \leq H_n$. De même, pour $k \geq 2$,

$\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t}$, et en sommant de 2 à n : $H_n - 1 \leq \ln n$. D'où

$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$. Pour $n \geq 2$, on divise par $\ln n > 0$:

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n} \leq \frac{H_n}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{\ln n}.$$

Les deux bornes tendent vers 1. Par le théorème des gendarmes, $H_n \sim \ln n$.

b. Cette fois, $t \rightarrow \ln t$ est croissante. Pour $k \geq 1$, $\ln k \leq \int_k^{k+1} \ln t \, dt$; pour $k \geq 2$,

$\int_{k-1}^k \ln t \, dt \leq \ln k$ (voir la figure). En sommant, et puisque $\ln 1 = 0$:

$$\int_1^n \ln t \, dt \leq L_n \leq \int_1^{n+1} \ln t \, dt.$$

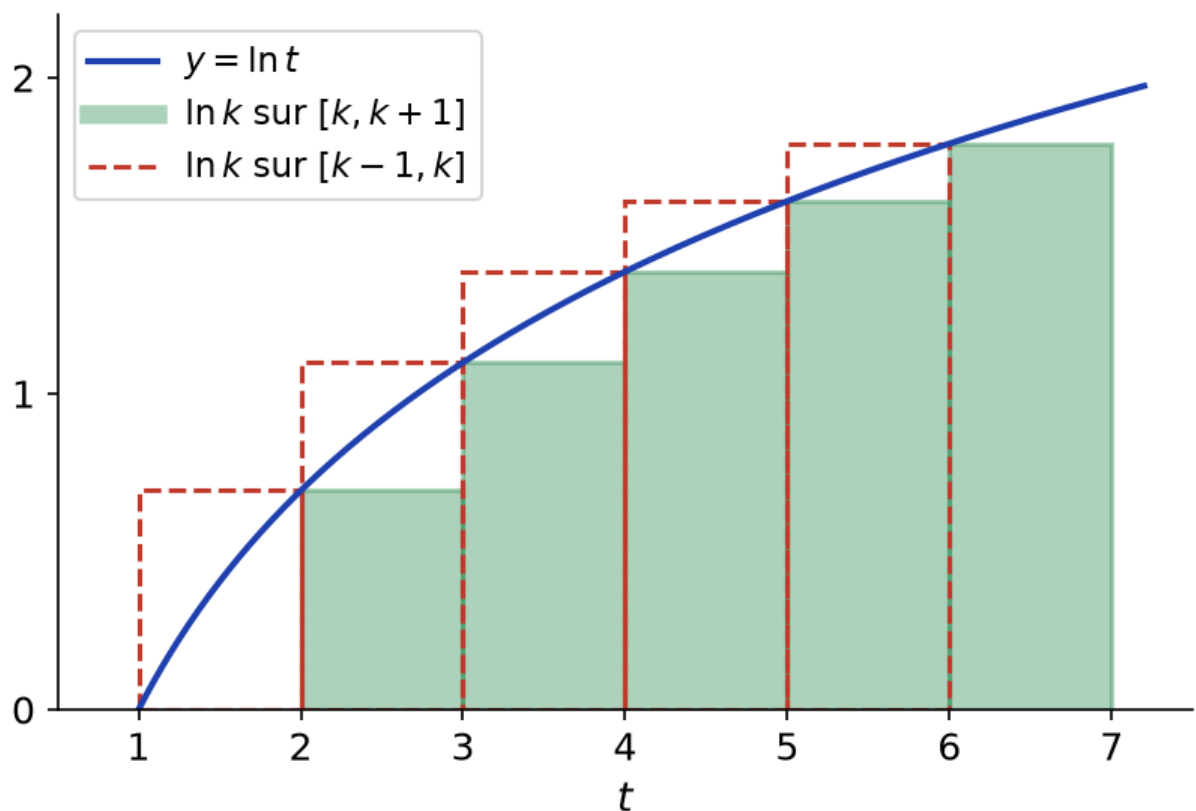
Une primitive de $\ln$ est $t \rightarrow t \ln t - t$, donc $\int_1^x \ln t \, dt = x \ln x - x + 1$. On obtient

$n \ln n - n + 1 \leq L_n \leq (n+1) \ln(n+1) - n$. Pour l'équivalent, on divise par $n \ln n$. La borne de gauche donne $1 - \frac{1}{\ln n} + \frac{1}{n \ln n} \rightarrow 1$. Pour celle de droite,

$(n+1)\ln(n+1) = (n+1)\ln n + (n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ et $0 \leq (n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{n+1}{n} \leq 2$,
donc

$$\frac{(n+1)\ln(n+1) - n}{n \ln n} \leq \frac{n+1}{n} + \frac{2-n}{n \ln n} \rightarrow 1.$$

Par encadrement, $\ln(n!) \sim n \ln n$.



Barème : a) 1,5 point : 1 pour l'encadrement (0,5 par inégalité), 0,5 pour l'équivalent ; b) 1,5 point : 0,5 pour la comparaison, 0,5 pour le calcul des intégrales, 0,5 pour l'équivalent.

Exercice 5 : Problème, équivalent du reste d'une série de Riemann (5 points)

a. La fonction $f : t \rightarrow t^{-\alpha}$ est positive et décroissante sur $[1, +\infty[$. Pour $k \geq 2$, on a donc

$$\int_k^{k+1} f \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f. \text{ On somme pour } k \text{ de } n+1 \text{ à } N :$$

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^N \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Or $\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}$ pour $x > 0$, intégrale convergente car $\alpha > 1$. En faisant tendre

N vers $+\infty$, on obtient $\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_n(\alpha) \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$. On multiplie par $(\alpha-1)n^{\alpha-1} > 0$: $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha-1} \leq (\alpha-1)n^{\alpha-1}R_n(\alpha) \leq 1$, et la borne de gauche tend vers 1. Par encadrement, $R_n(\alpha) \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

b. Les $R_n(\alpha)$ sont positifs et équivalents à $\frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}}$. Par comparaison avec une série de Riemann, $\sum R_n(\alpha)$ converge si et seulement si $\alpha-1 > 1$, **c'est-à-dire** $\alpha > 2$.

c. On réduit au même dénominateur $k^2(k-1)$:

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2 - k(k-1) - (k-1)}{k^2(k-1)} = \frac{k^2 - k^2 + k - k + 1}{k^2(k-1)} = \frac{1}{k^2(k-1)}.$$

d. La série télescopique vérifie $\sum_{k=n+1}^N \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{N} \rightarrow \frac{1}{n}$. Les trois séries

$$\sum \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right), \sum \frac{1}{k^2} \text{ et } \sum \frac{1}{k^2(k-1)}$$

$$\text{convergent, donc on peut sommer l'égalité de c) de } n+1 \text{ à } +\infty : \frac{1}{n} - R_n(2) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k-1)}.$$

e. On a $\frac{1}{k^2(k-1)} \sim \frac{1}{k^3}$, et ces termes sont positifs, de séries convergentes. Le théorème de sommation des relations de comparaison assure que les restes sont équivalents :

$$\sum_{k>n} \frac{1}{k^2(k-1)} \sim R_n(3). \text{ Par a) avec } \alpha = 3, R_n(3) \sim \frac{1}{2n^2}. \text{ Donc}$$

$$\frac{1}{n} - R_n(2) = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \text{ soit } R_n(2) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \text{ Contrôle numérique : pour } n = 10, \frac{1}{10} - \frac{1}{200} = 0,095, \text{ et } R_{10}(2) \approx 0,0952.$$

Barème : a) 2 points : 1 pour l'encadrement (comparaison et passage à la limite), 0,5 pour le calcul des intégrales, 0,5 pour l'équivalent ; b) 1 point ; c) 0,5 point ; d) 0,5 point (télescopage justifié) ; e) 1 point : 0,5 pour le théorème cité avec ses hypothèses, 0,5 pour le développement.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : séries numériques à termes positifs

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Séries à termes positifs](#) » en L2 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [séries à termes positifs](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L2 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L2 sur ce thème

- [Contrôle de maths L2 : comparaison série-intégrale et restes](#)