Corrigé du contrôle de maths L2 : séries entières et rayon de convergence

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : lemme d'Abel et série dérivée	4 points
Exercice 2 : Quatre rayons de convergence	4 points
Exercice 3 : Sommes de séries entières	4 points
Exercice 4 : Développements en série entière	3 points
Exercice 5 : Problème : une équation différentielle résolue par série entière	5 points
Total	**20 points**

Exercice 1 : Question de cours : lemme d'Abel et série dérivée (4 points)

a. **Lemme d'Abel.** Soit $r_0 > 0$ tel que la suite $(a_n\, r_0^n)$ soit bornée. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < r_0$, la série $\sum a_n\, z^n$ converge absolument.

Démonstration. Soit M un majorant de $(|a_n|\, r_0^n)$. Soit z tel que $|z| < r_0$; on pose $q = \frac{|z|}{r_0}$, de sorte que $0 \leq q < 1$. Pour tout n, on a

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$$|a_n\, z^n| = |a_n|\, r_0^n\; q^n \leq M\; q^n.$$

Or la série géométrique $\sum M\, q^n$ converge, car $0 \leq q < 1$. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum |a_n\, z^n|$ converge. **La série $\sum a_n\, z^n$ converge donc absolument pour $|z| < r_0$.**

b. Notons R' le rayon de la série dérivée $\sum_{n \geq 1} n\, a_n\, z^{n-1}$.

Montrons d'abord $R \leq R'$. Soit z tel que $|z| < R$ et choisissons un réel r avec $|z| < r < R$. Comme $r < R$, la série $\sum a_n\, r^n$ converge, donc la suite $(a_n\, r^n)$ est bornée par un réel M. Alors

$$\left|\, n\; a_n\; z^{n-1} \,\right| = \frac{n}{r} \left(\frac{|z|}{r}\right)^{n-1} |a_n|\, r^n \leq \frac{M}{r}\; n \left(\frac{|z|}{r}\right)^{n-1}.$$

La série $\sum n\, q^{n-1}$ avec $q = |z|/r \in [0, 1[$ converge (règle de d'Alembert : le quotient $(n+1)q/n$ tend vers $q < 1$). Par comparaison, la série dérivée converge absolument en z. Ainsi $R' \geq R$.

Montrons ensuite $R' \leq R$. Pour tout z et tout $n \geq 1$, on a $|a_n\, z^n| = |z|\; |n\, a_n\, z^{n-1}| \,/\, n \leq |z|\; |n\, a_n\, z^{n-1}|$. Donc, si $|z| < R'$, la série $\sum a_n\, z^n$ converge absolument, ce qui donne $R \geq R'$.

Conclusion : la série dérivée a le même rayon de convergence R.

Barème : a) 0,5 point pour l'énoncé, 1,5 point pour la preuve (majoration par une série géométrique, théorème de comparaison cité) ; b) 1,5 point pour l'inégalité $R \leq R'$ avec le choix d'un r intermédiaire, 0,5 point pour l'inégalité inverse.

Exercice 2 : Quatre rayons de convergence (4 points)

a. Les coefficients $a_n = n^2/3^n$ sont non nuls pour $n \geq 1$, et

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{3\,n^2} \longrightarrow \frac{1}{3}.$$

D'après la règle de d'Alembert pour les séries entières, **le rayon vaut** $R = 3$.

b. Les coefficients $a_n = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ sont non nuls, et

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \longrightarrow 4.$$

Par la règle de d'Alembert, **le rayon vaut** $R = \frac{1}{4}$.

c. La série est lacunaire (les coefficients d'indice impair sont nuls) : on applique la règle de d'Alembert à la série numérique $\sum u_n$ avec $u_n = \frac{|z|^{2n}}{4^n\,(n+1)}$, pour $z \neq 0$. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|z|^2}{4} \times \frac{n+1}{n+2} \longrightarrow \frac{|z|^2}{4}.$$

Si $|z| < 2$, cette limite est strictement inférieure à 1 : la série converge absolument. Si $|z| > 2$, la limite est strictement supérieure à 1 : la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang, donc ne tend pas vers 0, et la série diverge grossièrement. **Le rayon vaut** $R = 2$.

d. Supposons par l'absurde que $\sin n \to 0$. Comme $\sin(n+1) = \sin n \cos 1 + \cos n \sin 1$ et $\sin 1 \neq 0$, on obtient

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$$\cos n = \frac{\sin(n+1) - \sin n \cos 1}{\sin 1} \longrightarrow 0.$$

Alors $\sin^2 n + \cos^2 n \to 0$, ce qui contredit $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$. Donc $(\sin n)$ ne tend pas vers 0.

D'une part, la suite $(\sin(n) \cdot 1^n)$ est bornée par 1 ; le lemme d'Abel donne $R \geq 1$. D'autre part, en $z = 1$, le terme général $\sin n$ ne tend pas vers 0 : la série diverge grossièrement en 1, donc $R \leq 1$ (sinon elle convergerait absolument en 1). **Le rayon vaut $R = 1$.**

Barème : 1 point par question ; a) et b) : 0,5 point pour le quotient, 0,5 point pour la conclusion ; c) 0,5 point pour le passage à la série numérique, 0,5 point pour la discussion ; d) 0,5 point pour la non-convergence vers 0, 0,5 point pour l'encadrement du rayon.

Erreur fréquente : en c), appliquer d'Alembert aux coefficients a_n alors qu'un coefficient sur deux est nul ; le quotient a_{n+1}/a_n n'a alors aucun sens.

Exercice 3 : Sommes de séries entières (4 points)

a. La série géométrique $\sum x^n$ a pour rayon 1 et pour somme $\frac{1}{1-x}$ sur $]-1,1[$. Une série entière est dérivable terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence, et la série dérivée a le même rayon. Donc, pour $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n \geq 1} n\, x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \text{ puis } \sum_{n \geq 1} n\, x^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

On dérive encore terme à terme cette dernière série, de rayon 1 :

$$\sum_{n \geq 1} n^2\, x^{n-1} = \frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{(1-x) + 2x}{(1-x)^3} = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

En multipliant par x : $\sum_{n \geq 1} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$ **pour** $x \in]-1,1[$.

b. On prend $x = \frac{1}{2} \in]-1,1[$:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n^2}{2^n} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{3}{4} \times 8 = 6.$$

La somme vaut 6**.**

c. Les coefficients $\frac{1}{n(n+1)}$ vérifient $\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+2} \to 1$: **le rayon vaut** 1 par la règle de d'Alembert.

Pour $n \geq 1$, on a $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Les séries $\sum \frac{x^n}{n}$ et $\sum \frac{x^n}{n+1}$ ont aussi pour rayon 1 ; on peut donc séparer la somme pour $|x| < 1$. On sait que $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$. Pour $x \neq 0$:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{m \geq 2} \frac{x^m}{m} = \frac{1}{x}\left(-\ln(1-x) - x\right).$$

Par conséquent, pour $x \in]-1,1[$ non nul,

$$S(x) = -\ln(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{x} + 1 = 1 + \frac{(1-x)\ln(1-x)}{x}.$$

$S(x) = 1 + \frac{(1-x)\ln(1-x)}{x}$ **pour** $x \in]-1,0[\cup]0,1[$**, et** $S(0) = 0$**.**

Contrôle : au voisinage de 0,
$(1-x)\ln(1-x)/x = (1-x)\left(-1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \ldots\right) = -1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \ldots$, d'où
$S(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \ldots$, ce qui redonne bien les coefficients $\frac{1}{1 \times 2}$ et $\frac{1}{2 \times 3}$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Barème : a) 2 points : 0,5 pour le théorème de dérivation terme à terme cité, 0,5 pour la première somme, 1 pour la seconde ; b) 0,5 point ; c) 1,5 point : 0,5 pour le rayon, 0,5 pour la décomposition justifiée, 0,5 pour la somme avec le cas $x = 0$.

Exercice 4 : Développements en série entière (3 points)

a. On vérifie que $\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x} = \frac{(2-x)-(1-x)}{(1-x)(2-x)} = \frac{1}{(1-x)(2-x)}$. Pour $|x| < 1$, on a $\frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n$. Pour $|x| < 2$, on a

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{2^{n+1}}.$$

Pour $|x| < 1$, les deux séries convergent, donc

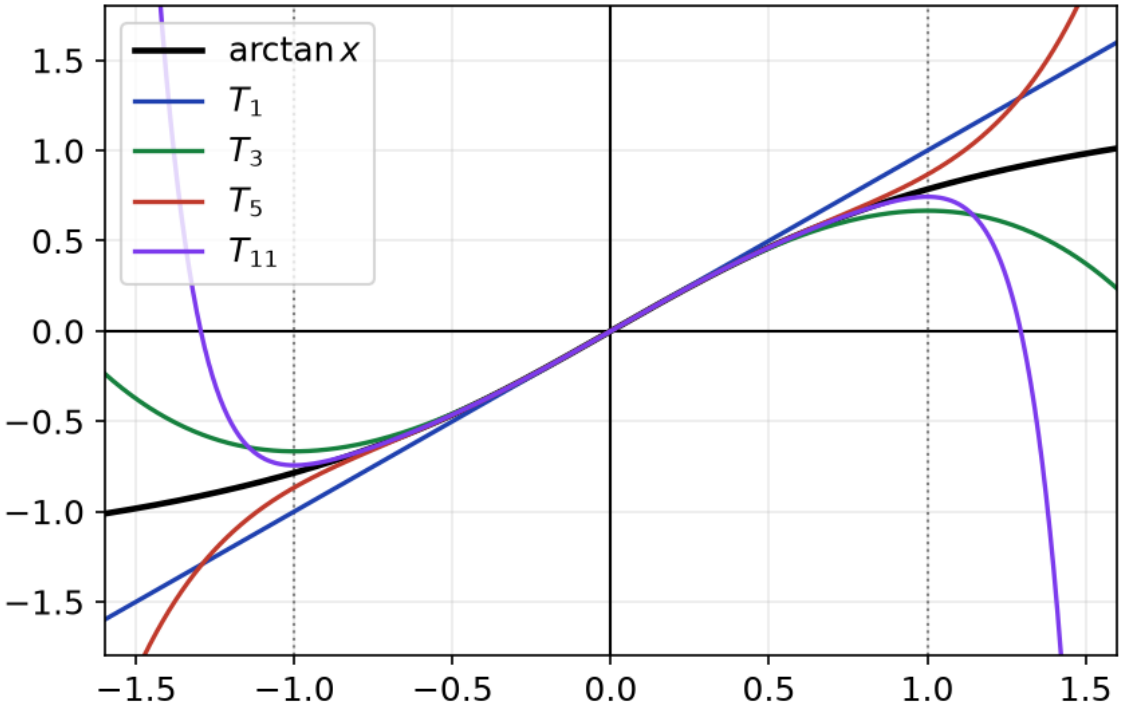
$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n.$$

Les coefficients tendent vers 1, donc leur quotient aussi : **le rayon de convergence est exactement** 1.

b. Pour $|x| < 1$, on a $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^{2n}$, série de rayon 1. D'après le théorème d'intégration terme à terme d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence (la primitive a le même rayon), et comme $\arctan 0 = 0$,

$$\arctan x = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

Le développement a pour rayon 1**.**



On note T_{2p+1} la somme partielle de degré $2p+1$ de ce développement. La figure montre que les sommes partielles approchent la fonction sur $]-1,1[$, mais s'en écartent brutalement dès que $|x|>1$, conformément au rayon trouvé.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour la décomposition, 0,5 pour le développement, 0,5 pour le rayon ; b) 1,5 point : 0,5 pour le développement de la dérivée, 0,5 pour le théorème cité, 0,5 pour le résultat avec son rayon.

Exercice 5 : Problème : une équation différentielle résolue par série entière (5 points)

a. Sur $]-R,R[$, la somme y d'une série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et ses dérivées s'obtiennent terme à terme. Pour $|x|<R$:

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$$4x\ y''(x) = \sum_{n\geq 2} 4n(n-1)\,a_n\,x^{n-1} = \sum_{n\geq 1} 4n(n-1)\,a_n\,x^{n-1},$$

$$2\ y'(x) = \sum_{n\geq 1} 2n\ a_n\ x^{n-1},\ \ y(x) = \sum_{n\geq 1} a_{n-1}\,x^{n-1}.$$

Comme $4n(n-1)+2n = 2n(2n-1)$, on obtient

$$4x\ y''(x) + 2\ y'(x) - y(x) = \sum_{n\geq 1} \left(2n(2n-1)\,a_n - a_{n-1}\right) x^{n-1}.$$

Par unicité du développement en série entière, cette somme est nulle sur $]-R, R[$ si et seulement si tous ses coefficients sont nuls. **Donc y est solution si et seulement si $2n(2n-1)\,a_n = a_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.**

b. La relation s'écrit $a_n = \frac{a_{n-1}}{(2n)(2n-1)}$. Par récurrence immédiate, $a_n = \frac{a_0}{(2n)!}$ **pour tout** n.

Si $a_0 \neq 0$, pour $x \neq 0$, le quotient $\left|\frac{a_{n+1}\,x^{n+1}}{a_n\,x^n}\right| = \frac{|x|}{(2n+2)(2n+1)}$ tend vers 0 : par la règle de d'Alembert, **le rayon est infini**. La condition $R > 0$ est donc remplie, et la réciproque de a) s'applique sur $\mathbb{R}$.

Pour $x \geq 0$, on écrit $x^n = (\sqrt{x})^{2n}$, d'où $y(x) = a_0 \sum_{n\geq 0} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = a_0\,\mathrm{ch}(\sqrt{x})$. Pour $x < 0$, on écrit $x^n = (-1)^n\,(\sqrt{-x})^{2n}$, d'où $y(x) = a_0\cos(\sqrt{-x})$.

Les solutions développables en série entière sont $y = a_0\,\varphi$, avec $\varphi(x) = \mathrm{ch}(\sqrt{x})$ si $x \geq 0$ et $\varphi(x) = \cos(\sqrt{-x})$ si $x < 0$.

c. Sur $]0, +\infty[$, posons $u = \sqrt{x}$. Alors $h'(x) = \frac{\mathrm{ch}\,u}{2\sqrt{x}}$ et

$$h''(x) = \frac{\mathrm{sh}\,u}{4x} - \frac{\mathrm{ch}\,u}{4\,x\,\sqrt{x}}.$$

Donc $4x\,h''(x) + 2\,h'(x) - h(x) = \mathrm{sh}\,u - \frac{\mathrm{ch}\,u}{\sqrt{x}} + \frac{\mathrm{ch}\,u}{\sqrt{x}} - \mathrm{sh}\,u = 0$. **La fonction h**

est solution de (E) sur $]0,+\infty[$.

En revanche, $h'(x) = \frac{\operatorname{ch}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \to +\infty$ quand $x \to 0^+$. Or une fonction développable en série entière au voisinage de 0 est de classe $\mathcal{C}^1$ près de 0, et sa dérivée a une limite finie en 0. **Donc h n'est la restriction d'aucune fonction développable en série entière en 0.**

d. Sur $]0,+\infty[$, le coefficient $4x$ ne s'annule pas : l'équation s'écrit $y'' + \frac{1}{2x}y' - \frac{1}{4x}y = 0$, à coefficients continus. D'après le théorème de Cauchy linéaire, l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2. Les fonctions $x \to \operatorname{ch}\sqrt{x}$ et h sont solutions ; elles sont linéairement indépendantes, car leur quotient $\operatorname{th}\sqrt{x}$ n'est pas constant.

Les solutions sur $]0,+\infty[$ sont les fonctions $x \to \lambda \operatorname{ch}\sqrt{x} + \mu \operatorname{sh}\sqrt{x}$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Si une telle solution se prolonge en une fonction développable en série entière en 0, alors μh est aussi la restriction d'une telle fonction (différence de deux fonctions développables). D'après c), cela impose $\mu = 0$. Réciproquement, $\lambda \operatorname{ch}\sqrt{x}$ se prolonge par $\lambda \varphi$. **Seules les solutions $\lambda \operatorname{ch}\sqrt{x}$ conviennent.**

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour la dérivation terme à terme justifiée, 0,5 pour le réindexage, 0,5 pour l'unicité des coefficients ; b) 1,5 point : 0,5 pour a_n, 0,5 pour le rayon, 0,5 pour les deux expressions ; c) 1 point : 0,5 pour la vérification, 0,5 pour l'argument de dérivée infinie ; d) 1 point : 0,5 pour la dimension et l'indépendance, 0,5 pour la sélection des solutions.

Revenir à l'énoncé du contrôle

Après le corrigé du contrôle : séries entières et rayon de

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

convergence

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « Séries entières » en L2 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** séries entières.

Retrouvez tous les **contrôles de maths de L2** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.

Autres contrôles de maths de L2 sur ce thème

- Contrôle de maths L2 : partiel de S4, séries entières et de Fourier