

Corrigé du contrôle de maths L2 : séries de Fourier et égalité de Parseval

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : Dirichlet, Parseval et convergence normale	4 points
Exercice 2 : Le signal créneau	5 points
Exercice 3 : Valeur absolue du sinus	4 points
Exercice 4 : Problème : dent de scie, parabole et zêta de 4	7 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : Dirichlet, Parseval et convergence normale (4 points)

- a. **Théorème de Dirichlet.** Soit f une fonction 2π -périodique de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors, pour tout réel x , la suite $(S_N(f)(x))$ converge et

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(f)(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2},$$

où $f(x^+)$ et $f(x^-)$ désignent les limites à droite et à gauche de f en x . En particulier, la limite vaut $f(x)$ en tout point où f est continue.

- b. **Égalité de Parseval.** Pour f continue par morceaux et 2π -périodique, les séries suivantes convergent et

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

Si f est à valeurs réelles, cela s'écrit

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt = \frac{a_0(f)^2}{2} + \sum_{k \geq 1} (a_k(f)^2 + b_k(f)^2).$$

- c. Soit $-\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_p = \pi$ une subdivision adaptée : f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chaque $[x_j, x_{j+1}]$, en prolongeant sa dérivée aux bornes. Une intégration par parties sur chaque segment donne

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f'(t) e^{-int} dt = [f(t) e^{-int}]_{x_j}^{x_{j+1}} + in \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(t) e^{-int} dt.$$

En sommant, les termes entre crochets se télescopent, car f est continue. Il reste

$f(\pi) e^{-in\pi} - f(-\pi) e^{in\pi}$, nul car $f(\pi) = f(-\pi)$ et $e^{-in\pi} = e^{in\pi} = (-1)^n$. En divisant par 2π : $c_n(f') = in c_n(f)$ **pour tout** $n \in \mathbb{Z}$.

- d. Pour $n \neq 0$, l'inégalité $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ donne

$$|c_n(f)| = \frac{|c_n(f')|}{|n|} \leq \frac{1}{2} \left(|c_n(f')|^2 + \frac{1}{n^2} \right).$$

La fonction f' est continue par morceaux, donc l'inégalité de Bessel (ou Parseval) assure la

convergence de $\sum |c_n(f')|^2$. La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge aussi. Par comparaison,

$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|$ **converge**.

Comme $|c_n(f) e^{inx}| = |c_n(f)|$ pour tout x , la série de Fourier converge normalement sur

$\mathbb{R}$. De plus, f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux : le théorème de Dirichlet identifie sa somme à $f(x)$ en tout point. **La série de Fourier de f converge donc normalement vers f .**

Barème : a) 1 point ; b) 1 point (0,5 par forme) ; c) 1 point : 0,5 pour l'intégration par parties par morceaux, 0,5 pour le télescopage et la périodicité ; d) 1 point : 0,5 pour la majoration et Bessel, 0,5 pour la convergence normale vers f .

Exercice 2 : Le signal créneau (5 points)

- a. La fonction f est impaire, donc $t \rightarrow f(t)\cos(kt)$ est impaire et $a_k(f) = 0$ pour tout k . La fonction $t \rightarrow f(t)\sin(kt)$ est paire, d'où

$$b_k(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kt) dt = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos(kt)}{k} \right]_0^{\pi} = \frac{2(1 - (-1)^k)}{k\pi}.$$

Donc $b_k(f) = 0$ si k est pair et $b_k(f) = \frac{4}{k\pi}$ si k est impair.

- b. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux (constante sur $]0, \pi[$ et $]-\pi, 0[$). En un point x qui n'est pas multiple de π , f est continue ; en $x = m\pi$, la demi-somme des limites vaut $\frac{1 + (-1)}{2} = 0 = f(m\pi)$. Le théorème de Dirichlet donne donc, pour tout réel x ,

$$f(x) = \sum_{k \geq 1} b_k(f) \sin(kx) = \frac{4}{\pi} \sum_{p \geq 0} \frac{\sin((2p+1)x)}{2p+1}.$$

En $x = \frac{\pi}{2}$, on a $\sin((2p+1)\frac{\pi}{2}) = (-1)^p$ et $f(\frac{\pi}{2}) = 1$. **Donc $\sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}$.**

La figure de l'énoncé montre que les sommes partielles dépassent la valeur 1 près des sauts : c'est le phénomène de Gibbs, qui ne contredit pas la convergence simple.

c. On a $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt = \frac{2\pi}{\pi} = 2$. L'égalité de Parseval s'écrit

$$2 = \sum_{p \geq 0} \frac{16}{\pi^2 (2p+1)^2}, \text{ donc } \sum_{p \geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge absolument ; on peut séparer les indices pairs et impairs :

$$\zeta(2) = \sum_{p \geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p \geq 1} \frac{1}{4p^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\zeta(2)}{4}.$$

Donc $\frac{3}{4}\zeta(2) = \frac{\pi^2}{8}$, soit $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Barème : a) 2 points : 0,5 pour la parité, 1 pour le calcul de b_k , 0,5 pour la discussion selon la parité de k ; b) 1,5 point : 1 pour Dirichlet avec la vérification aux points de discontinuité, 0,5 pour $\frac{\pi}{4}$; c) 1,5 point : 1 pour Parseval, 0,5 pour $\zeta(2)$.

Exercice 3 : Valeur absolue du sinus (4 points)

a. La fonction g est paire, donc $b_k(g) = 0$ et $a_k(g) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \cos(kt) dt$. On a

$$a_0(g) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t dt = \frac{4}{\pi}.$$

Pour $k \geq 1$, on linéarise : $\sin t \cos(kt) = \frac{1}{2}(\sin((k+1)t) - \sin((k-1)t))$. Pour $m \geq 1$,

$$\int_0^\pi \sin(mt) dt = \frac{1 - (-1)^m}{m},$$
et cette intégrale est nulle si $m = 0$.

Si k est impair, $k+1$ et $k-1$ sont pairs : les deux intégrales sont nulles et $a_k(g) = 0$.

Si $k = 2p$ avec $p \geq 1$, les entiers $k \pm 1$ sont impairs :

$$\int_0^\pi \sin t \cos(kt) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{k+1} - \frac{2}{k-1} \right) = \frac{(k-1) - (k+1)}{k^2 - 1} = -\frac{2}{k^2 - 1}.$$

Donc $a_{2p}(g) = -\frac{4}{\pi(4p^2 - 1)}$ pour $p \geq 1$.

b. La fonction g est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux (elle est $\mathcal{C}^1$ sur chaque $[m\pi, (m+1)\pi]$). D'après l'exercice 1, d), sa série de Fourier converge normalement vers g :

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{p \geq 1} \frac{\cos(2px)}{4p^2 - 1}.$$

Première manière : en $x = 0$, on obtient $0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{p \geq 1} \frac{1}{4p^2 - 1}$. Seconde manière :

$\frac{1}{4p^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2p+1} \right)$, et la somme télescopique jusqu'à P vaut $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2P+1} \right)$,
qui tend vers $\frac{1}{2}$. **Dans les deux cas,** $\sum_{p \geq 1} \frac{1}{4p^2 - 1} = \frac{1}{2}$.

c. On a $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \sin^2 t dt = \frac{1}{\pi} \times \pi = 1$. L'égalité de Parseval s'écrit

$$1 = \frac{1}{2} \times \frac{16}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{p \geq 1} \frac{1}{(4p^2 - 1)^2}.$$

Donc $\sum_{p \geq 1} \frac{1}{(4p^2 - 1)^2} = \frac{\pi^2}{16} \left(1 - \frac{8}{\pi^2}\right)$. **La somme vaut** $\frac{\pi^2 - 8}{16}$ (environ 0,117, ce qui est cohérent avec le premier terme $\frac{1}{9} \approx 0,111$).

Barème : a) 2 points : 0,5 pour la parité et a_0 , 0,5 pour la linéarisation, 0,5 pour le cas impair, 0,5 pour le cas pair ; b) 1 point : 0,5 pour la convergence normale, 0,5 pour la somme ; c) 1 point : 0,5 pour Parseval, 0,5 pour le résultat.

Erreur fréquente : oublier le facteur $\frac{1}{2}$ devant a_0^2 dans l'égalité de Parseval, ce qui fausse toute la somme.

Exercice 4 : Problème : dent de scie, parabole et zêta de 4 (7 points)

a. Sur $]-\pi, \pi[$, $\varphi(t) = t$ est impaire, et $\varphi(\pi) = 0$: la fonction φ est impaire. Donc $a_k(\varphi) = 0$, et, par intégration par parties,

$$b_k(\varphi) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \sin(kt) dt = \frac{2}{\pi} \left(\left[-\frac{t \cos(kt)}{k} \right]_0^\pi + \frac{1}{k} \int_0^\pi \cos(kt) dt \right) = \frac{2}{\pi} \times \left(-\frac{\pi (-1)^k}{k} \right).$$

En effet, la dernière intégrale est nulle. **Donc** $b_k(\varphi) = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}$ pour $k \geq 1$.

b. On a $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi t^2 dt = \frac{1}{\pi} \times \frac{2\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3}$. Par l'égalité de Parseval, $\frac{2\pi^2}{3} = \sum_{k \geq 1} \frac{4}{k^2}$. **Donc** $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

c. La fonction $t \rightarrow t^2$ est continue sur $[-\pi, \pi]$ et prend la même valeur π^2 en $-\pi$ et en π : la fonction périodisée h est continue sur $\mathbb{R}$. Sur chaque intervalle

$]-\pi + 2m\pi, \pi + 2m\pi[$, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée $2(t - 2m\pi)$ se prolonge aux bornes. Donc h est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et $h' = 2\varphi$, sauf aux points $\pi + 2m\pi$.

La fonction h est paire, donc $b_k(h) = 0$, et $a_0(h) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{2\pi^2}{3}$.

Pour $k \geq 1$, on a $c_k = \frac{1}{2}(a_k - i b_k)$. La relation $c_k(h') = ik c_k(h)$ de l'exercice 1, c) donne alors $a_k(h') - i b_k(h') = k b_k(h) + ik a_k(h)$, donc $b_k(h') = -k a_k(h)$. Avec $h' = 2\varphi$ (l'égalité hors d'un nombre fini de points ne change pas les intégrales) :

$$a_k(h) = -\frac{2 b_k(\varphi)}{k} = -\frac{4(-1)^{k+1}}{k^2}.$$

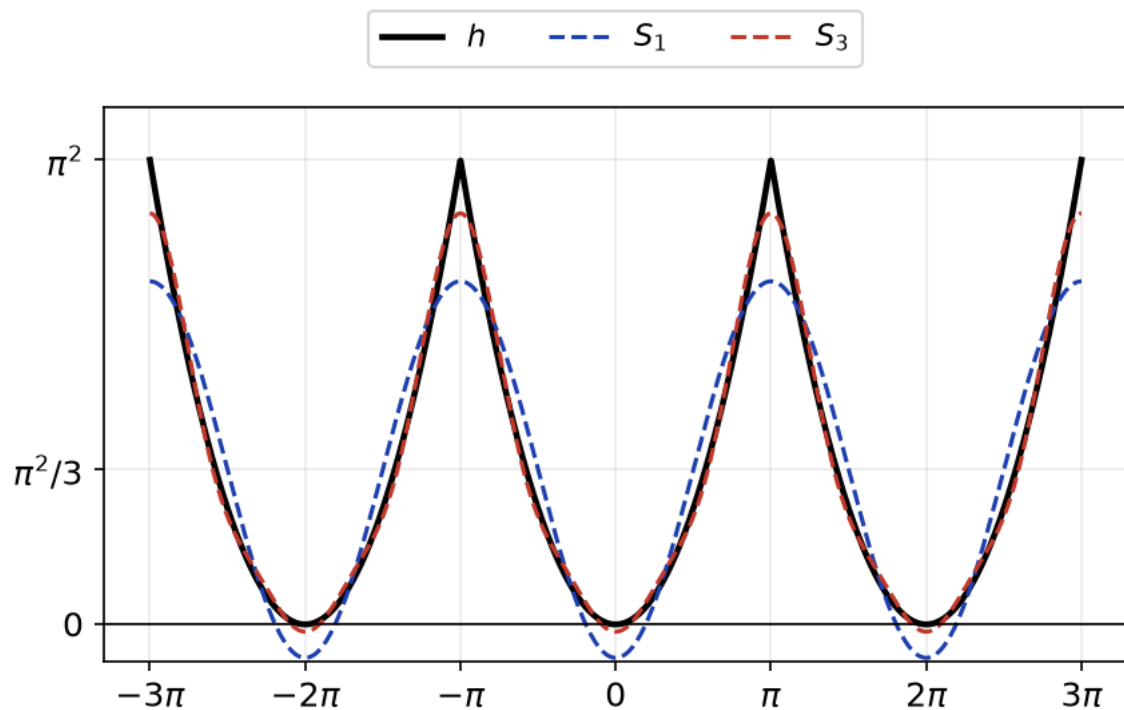
Ainsi $a_0(h) = \frac{2\pi^2}{3}$, $a_k(h) = \frac{4(-1)^k}{k^2}$ pour $k \geq 1$, et $b_k(h) = 0$.

- d. La série $\sum \frac{4}{k^2}$ converge, donc $\sum a_k(h) \cos(kx)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Comme h est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, le théorème de Dirichlet identifie la somme à h . Pour tout $x \in [-\pi, \pi]$:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k \cos(kx)}{k^2}.$$

En $x = \pi$, $\cos(k\pi) = (-1)^k$, d'où $\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\zeta(2)$: $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

En $x = 0$, on obtient $0 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k^2}$: $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.



La figure confirme la convergence uniforme : dès S_3 , l'écart avec h est faible sur toute la période, et il n'y a pas de phénomène de Gibbs puisque h est continue.

e. On a $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^4 dt = \frac{1}{\pi} \times \frac{2\pi^5}{5} = \frac{2\pi^4}{5}$. L'égalité de Parseval donne

$$\frac{2\pi^4}{5} = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi^2}{3} \right)^2 + \sum_{k \geq 1} \frac{16}{k^4} = \frac{2\pi^4}{9} + 16 \zeta(4).$$

Donc $16 \zeta(4) = 2\pi^4 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) = \frac{8\pi^4}{45}$. Ainsi $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour l'imparité, 1 pour l'intégration par parties ; b) 1 point ; c) 2 points : 0,5 pour la continuité et la régularité, 0,5 pour a_0 et la parité, 1 pour a_k ; d) 1,5 point : 0,5 pour la convergence justifiée, 0,5 par valeur particulière ; e) 1 point : 0,5 pour Parseval, 0,5 pour $\zeta(4)$.

Après le corrigé du contrôle : séries de Fourier et égalité de Parseval

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Séries de Fourier](#) » en L2 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [séries de fourier](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L2 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L2 sur ce thème

- [Contrôle de maths L2 : partiel de S4, séries entières et de Fourier](#)